



# Utilisation de la méthode d'équivalence de Cartan dans la construction d'un solveur d'équations différentielles

Raouf Dridi

## ► To cite this version:

Raouf Dridi. Utilisation de la méthode d'équivalence de Cartan dans la construction d'un solveur d'équations différentielles. Mathématiques [math]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2007. Français. NNT : . tel-00264288

**HAL Id: tel-00264288**

**<https://theses.hal.science/tel-00264288>**

Submitted on 14 Mar 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université des Sciences et Technologies de Lille I,  
en cotutelle avec l'Université Badji Mokhtar Annaba

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques et informatique

par **Raouf Dridi**

Utilisation de la méthode d'équivalence de Cartan dans la  
construction d'un solveur d'équations différentielles

Date de soutenance : le 20 Juillet 2007

### Membres du jury

Président :	Sophie Tison	Professeur, LIFL Université de Lille I
Rapporteurs :	Peter Olver	Professeur, University of Minnesota
	Marc Giusti	DR CNRS, École Polytechnique
Directeurs :	Michel Petitot	Professeur, LIFL Université de Lille I
	Rebbani Faouzia	Professeur, Université de Annaba



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>17</b>
1.1	Un système EDP est une diffiété . . . . .	17
1.1.1	L'espace $J^\infty$ . . . . .	17
1.1.2	Le module des formes de contact . . . . .	18
1.1.3	Transformations de contact . . . . .	19
1.1.4	Diffiétés . . . . .	19
1.2	Systèmes différentiels extérieurs . . . . .	20
1.2.1	Complète intégrabilité . . . . .	21
1.2.2	Théorème de Cartan-Kähler . . . . .	21
1.2.3	Systèmes extérieurs avec condition d'indépendance . . . . .	24
1.2.4	Prolongation d'un système différentiel extérieur . . . . .	24
1.3	Systèmes de Pfaff linéaires . . . . .	25
1.3.1	Un système EDP est un système de Pfaff linéaire . . . . .	26
1.3.2	Equations de structure . . . . .	26
1.3.3	Élément de torsion essentiel . . . . .	26
1.3.4	Absorption de la torsion . . . . .	27
1.3.5	Algorithme général . . . . .	28
1.4	Pseudo-groupes de Lie . . . . .	29
1.4.1	Le premier théorème fondamental de Cartan . . . . .	30
1.4.2	Pseudo-algèbres de Lie . . . . .	32
1.4.3	Problèmes d'équivalence . . . . .	33
<b>2</b>	<b>ROSENFELD-GRÖBNER et problème d'équivalence</b>	<b>35</b>
2.1	ROSENFELD-GRÖBNER . . . . .	35
2.1.1	La pseudo-division des polynômes . . . . .	36
2.1.2	Polynômes différentiels . . . . .	37
2.1.3	Systèmes EDP comportant des inéquations . . . . .	38
2.1.4	Ensembles caractéristiques . . . . .	40
2.1.5	Élimination différentielle . . . . .	42
2.1.6	Développements de Taylor des solutions . . . . .	43

2.1.7	Système différentiel défini par un ensemble caractéristique . . .	44
2.1.8	Historique . . . . .	45
2.2	Le problème d'équivalence avec cible fixée . . . . .	46
2.2.1	Le cas des équations ordinaires du 2 <sup>e</sup> ordre . . . . .	46
2.2.2	Résultats généraux . . . . .	51
2.3	Conclusion . . . . .	58
<b>3</b>	<b>La méthode d'équivalence de Cartan</b>	<b>59</b>
3.1	Les $G$ -structures . . . . .	59
3.1.1	Définitions et exemples . . . . .	60
3.1.2	Les $\{e\}$ -structures . . . . .	62
3.2	$G$ -structures et problèmes d'équivalence . . . . .	63
3.3	La méthode d'équivalence de Cartan . . . . .	66
3.3.1	Calcul des équations de structure . . . . .	66
3.3.2	Absorption de la torsion . . . . .	68
3.3.3	Normalisation . . . . .	69
3.3.4	Le test de Cartan . . . . .	71
3.3.5	Prolongation . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Symétries</b>	<b>75</b>
4.1	La notion de symétrie . . . . .	76
4.2	La méthode de Lie . . . . .	77
4.2.1	Équations de Lie . . . . .	78
4.2.2	Exemple : Équation de Liénard . . . . .	79
4.3	Pseudo-groupes discrets de symétries . . . . .	85
4.3.1	Solution : Utilisation des invariants . . . . .	86
4.3.2	Illustrations . . . . .	86
4.4	Symétries d'une famille de diffiétés . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Calcul du changement de variables</b>	<b>95</b>
5.1	La transformation $\varphi$ s'obtient sans intégration . . . . .	95
5.2	La transformation $\varphi$ se calcule en fonction des invariants . . . . .	96
5.2.1	Illustration . . . . .	97
5.3	Abaissement de degré . . . . .	100
5.4	Équivalence avec une famille d'équations . . . . .	105
5.5	Deux autres exemples . . . . .	108
5.5.1	Les invariants . . . . .	108
5.5.2	La famille d'équations PII . . . . .	110
<b>6</b>	<b>Contribution à la construction d'un nouveau solveur</b>	<b>113</b>

---

6.1	Limitations des solveurs actuels . . . . .	114
6.2	Un solveur basé sur la méthode de Cartan . . . . .	115
6.2.1	Précalcul de la table . . . . .	115
6.2.2	L'algorithme du nouveau solveur . . . . .	118
6.2.3	Temps de calcul et espace mémoire . . . . .	119
6.3	Révision de la liste de Kamke . . . . .	120
6.3.1	Équations redondantes . . . . .	120
6.3.2	Réduction des pseudo-groupes discrets de symétries . . . . .	120
<b>7</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>123</b>
<b>A</b>	<b>Quelques formules en algèbre extérieure</b>	<b>125</b>
A.1	Différentielle extérieure . . . . .	125
A.2	Produit intérieur . . . . .	126
A.3	Derivée de Lie . . . . .	126
A.4	Produit extérieur . . . . .	126



*“In these days the angel of geometry and the devil of abstract algebra  
fight for the soul of every individual discipline of mathematics.”*

**Hermann Weyl**





# Notations

$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$M$	variété $\mathbb{K}$ -analytique de dimension $m$
$C^\infty(M)$	$\mathbb{K}$ -algèbre des fonctions indéfiniment dérivables de $M$ dans $\mathbb{K}$
$C^\omega(M)$	$\mathbb{K}$ -algèbre des fonctions analytiques de $M$ dans $\mathbb{K}$
$\text{Diff}^{\text{loc}} M$	pseudo-groupe des difféomorphismes locaux de $M$ dans $M$
$T_x M$	espace tangent en $x$ à la variété $M$
$T_x^* M$	espace cotangent en $x$ à la variété $M$
$TM$	fibré tangent de $M$ (dimension $2m$ )
$T^* M$	fibré cotangent de $M$ (dimension $2m$ )
$\Omega(M)$	module des formes différentielles de $M$
$\mathcal{R}(M)$	variété fibrée des repères de $M$
$\mathcal{R}^*(M)$	variété fibrée des corepères de $M$
$\Gamma(Y)$	espace des sections locales du fibré $Y$ au-dessus de $M$
$X$	variété analytique de dimension $p$ sur $\mathbb{K}$
$U$	variété analytique de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$
$x$	$x = (x^1, x^2, \dots, x^p)$ , variables indépendantes
$u$	$u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ , variables dépendantes
$J^q(X, U)$	variété des jets d'ordre $q$ des fonctions de $X$ dans $U$
$(x, u^{(q)})$	système de coordonnées locales de $J^q(X, U)$
$D_i = \frac{d}{dx^i}$	dérivation totale (champ de Cartan) par rapport à $x^i$
$\mathcal{E} = (M, \Delta)$	une diffiété munie de la distribution involutive $\Delta$
$\text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E})$	pseudo-groupe des symétries locales de $\mathcal{E}$
$\text{GL}(m, \mathbb{R})$	matrices réelles $m \times m$ invertibles
$G$	sous-groupe de Lie de $\text{GL}(m, \mathbb{R})$ de dimension $r$
$P = (M, G, \theta)$	$G$ -structure sur la variété $M$
$\omega$	$\omega = (\omega^1, \dots, \omega^m)$ , corepère de $M$
$\theta$	$\theta = (\theta^1, \dots, \theta^m)$ , forme canonique sur $P$
$\pi$	$\pi = (\pi^1, \dots, \pi^r)$ , formes de Maurer-Cartan de $G$ modifiées
$(X_1, \dots, X_m)$	dérivations duales aux formes $(\theta^1, \dots, \theta^m)$
$s_i$	caractères de Cartan
$\hat{s}_m$	pseudo-caractère tel que $s_0 + s_1 + \dots + s_{p-1} + \hat{s}_m = m - p$
$s'_i$	caractères réduits de Cartan
$\hat{s}'_m$	pseudo-caractère tel que $s'_0 + s'_1 + \dots + s'_{p-1} + \hat{s}'_m = m - p$
$(R, \Delta)$	anneau différentiel muni de l'ensemble de dérivations $\Delta$
$(C)$	idéal algébrique engendré par l'ensemble $C \subset R$
$[C]$	idéal différentiel engendré par l'ensemble $C \subset R$



# Introduction

LES GRANDS SYSTÈMES DE CALCUL FORMEL (MAPLE, MATEMATICA, etc.) sont aujourd'hui largement utilisés dans les bureaux d'étude, dans l'enseignement et dans les laboratoires de recherche. Ils comportent tous un, voir plusieurs solveurs d'équations différentielles.

Pour résoudre une équation différentielle ordinaire (EDO) donnée, les solveurs actuels commencent par tester si cette équation figure, modulo un renommage éventuel des variables, dans une certaine liste d'équations que l'on sait résoudre<sup>1</sup>.

Si tel n'est pas le cas, le solveur fait appel à la méthode de réduction d'ordre initiée par S. Lie. Illustrons l'idée de S. Lie sur l'équation différentielle ordinaire du 2<sup>e</sup> ordre

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (1)$$

La première étape consiste à calculer les générateurs infinitésimaux  $X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$  des symétries ponctuelles de cette équation. On montre que les inconnues  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  sont solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires, appelé *équations de Lie*. La deuxième étape consiste à calculer un changement de coordonnées  $(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$  qui redresse le champ de vecteur  $X$ . Les nouvelles coordonnées  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  dites *canoniques*, sont telles que  $X = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}$ . En ces coordonnées, l'équation à résoudre est maintenant invariante sous l'action du groupe des translations  $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y} + C)$ ; elle est donc de la forme

$$\bar{F}\left(\bar{x}, \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}, \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}\right) = 0. \quad (2)$$

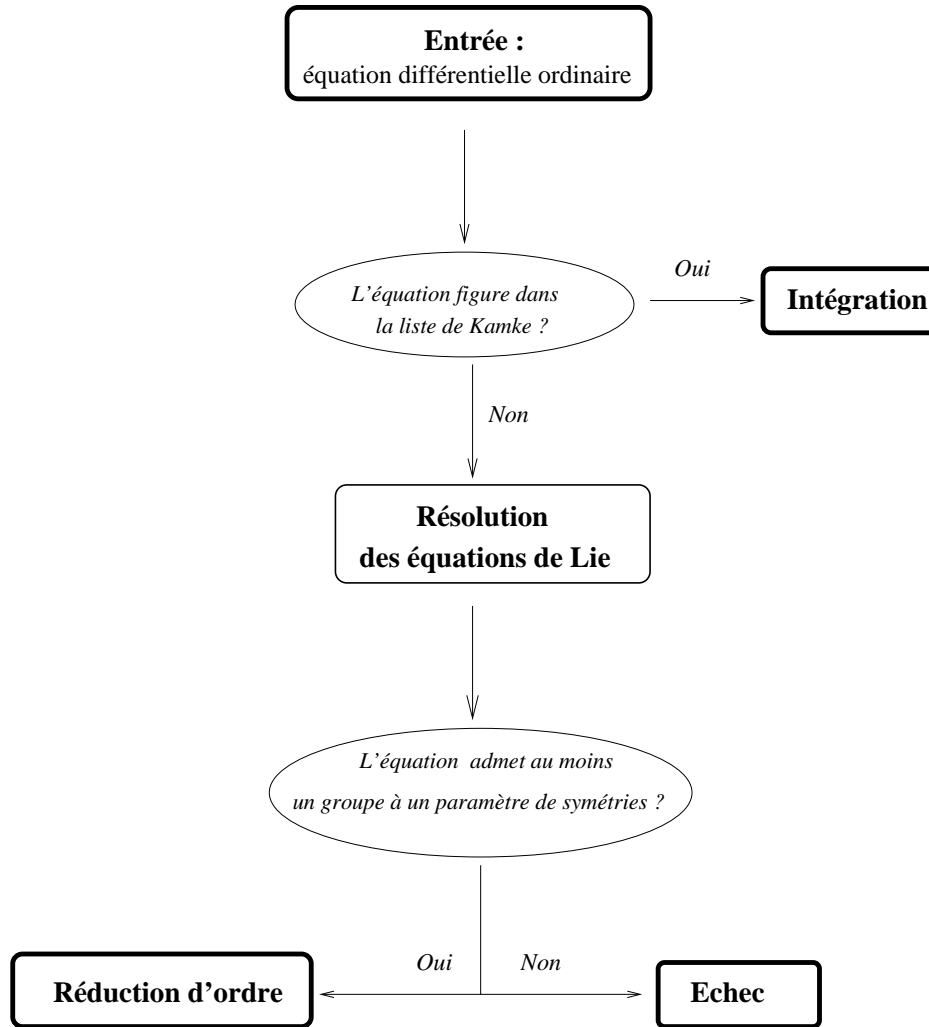
On réduit l'ordre de cette équation en posant  $z = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$ , ce qui donne

$$\bar{F}\left(\bar{x}, z, \frac{dz}{d\bar{x}}\right) = 0.$$

Au bout du compte, on obtient une EDO du premier ordre que le solveur essayera de résoudre en réitérant le même schéma. Si  $z(\bar{x})$  est la solution de cette équation, on obtient la solution  $\bar{y}(\bar{x})$  de l'équation (2) en effectuant la quadrature  $\bar{y}(\bar{x}) = \int z(\bar{x}) d\bar{x}$ . On retrouve la solution  $y(x)$  de l'équation (1) en effectuant le changement de coordonnées  $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (x, y)$ .

---

<sup>1</sup>En général, cette liste est prise du livre de Kamke [Kam44], basé sur les travaux de P. Painlevé [Pai02] et ses disciples Gambier et Garnier.

FIG. 1 – *Algorithme d'un solveur d'EDO.*

EN PRATIQUE, plusieurs difficultés apparaissent. Tout d'abord, le calcul des quadratures ainsi que l'intégration des systèmes EDP (même linéaires) n'est pas chose facile. De ce fait, il arrive souvent que le solveur se contente de retourner en sortie des résultats partiels, en particulier lorsque la dimension du (pseudo)groupe de symétries de l'équation à résoudre est petite. Enfonçons le clou : lorsque cette dimension est nulle, les solveurs, tel qu'il sont conçus actuellement, sont incapables d'intégrer ou même de réduire l'ordre de l'équation.

Cette thèse s'inscrit donc dans l'effort d'amélioration des solveurs actuels. Nous allons *présenter et montrer la faisabilité d'une architecture, totalement nouvelle, pour la conception d'un solveur d'équations différentielles basé sur la méthode d'équivalence de Cartan*<sup>2</sup> pour détecter l'existence d'une équation différentielle de la liste de Kamke, équivalente à l'équation que l'on veut résoudre et calculer le changement de variables qui réalise cette équivalence.

<sup>2</sup>La méthode d'équivalence de Cartan a été implantée récemment par S. Neut [Neut].

CONSIDÉRONS UN PROBLÈME D'ÉQUIVALENCE  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$ , où  $\mathcal{E}_f$  est une famille d'équations différentielles indexée par une fonction arbitraire  $f$  et  $\Phi$  un pseudo-groupe de Lie opérant sur les variables de l'équation  $\mathcal{E}_f$ .

Étant donnée une l'équation *cible*  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  ( $\bar{f}$  est fixée), intéressons-nous aux changements de coordonnées  $\varphi \in \Phi$  qui conjuguent l'équation *générique*<sup>3</sup>  $\mathcal{E}_f$  avec l'équation cible  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ , ce que l'on note  $\mathcal{E}_{\bar{f}} = \varphi_* \mathcal{E}_f$ . On peut disjoindre deux questions : la première concerne l'existence de la transformation  $\varphi \in \Phi$ , c'est à dire la détermination des conditions pourtant sur la fonction  $f$  pour que  $\varphi$  existe. La deuxième est le calcul *explicite* de ce changement de coordonnées  $\varphi \in \Phi$ .

C'est plutôt la première question qui a suscité le plus d'intérêt et a fait l'objet de nombreux travaux. Elle est essentiellement traitée à l'aide de la méthode des *variétés classifiantes* telle qu'elle est présentée dans [Olv95]. Il s'agit de déterminer les conditions d'équivalence en partant des invariants du problème d'équivalence  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$  obtenus par la méthode d'équivalence de E. Cartan. Toutefois, même si les résultats obtenus sont mathématiquement très intéressants, aucun de ces travaux ne permet de construire un solveur d'équations différentielles. Le calcul des variétés classifiantes est un calcul d'élimination qui fait apparaître des formules inutilisables en raison de leur taille en mémoire. A l'opposé, dans certains cas, toutes les équations d'une famille sont équivalentes localement entre elles, mais on ne sait pas calculer les changements de variables : c'est le cas des systèmes d'équations de la forme  $\dot{x}(t) = f(x)$  avec  $x \in \mathbb{R}^n$ . Si l'on disposait d'un algorithme pour calculer le changement de coordonnées  $\bar{x} = \varphi(x)$  redressant le champs de vecteurs  $f(x)$ , on saurait ipso-facto résoudre toutes les équations différentielles.

Pour cette raison, le calcul du changement de variables  $\varphi$  est le point clé dans la conception d'un solveur d'équations différentielles. Nous montrons dans cette thèse qu'il est possible, dans de très nombreux cas, de précalculer la forme *nécessaire* du changement de variables  $\varphi$  uniquement à partir de l'équation cible  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ . Une fois connue l'équation à résoudre  $\mathcal{E}_f$ , il suffit de tester que  $\varphi_* \mathcal{E}_f = \mathcal{E}_{\bar{f}}$ , ce qui est dans la plupart des cas, plus simple que de tester les conditions d'équivalence obtenues par le calcul des variétés classifiantes. Nous verrons au chapitre 6, comment cette étude débâche sur la conception d'une *nouvelle génération* de solveurs d'équations différentielles.

Ceci dit, le calcul du changement de variables est une question qui peut être délicate. Par exemple, S. Lie a montré que toute équation du second ordre

$$y'' = f(x, y, y')$$

se ramène localement à l'équation  $y'' = 0$  par une transformation de contact  $\varphi$  pourtant sur les variables  $x$ ,  $y$  et  $y'$ . Le calcul explicite de cette transformation  $\varphi$  est en général impossible. La difficulté vient du fait que le pseudo-groupe  $\Phi$  des transformations autorisées, en l'occurrence les transformations de contact, est "trop général" en un sens que nous allons préciser.

Nous verrons que la transformation  $\varphi$  est solution d'un système EDP comportant des inéquations. En vertu de la théorie des systèmes en involution,  $\varphi$  dépend d'un certain nombre de constantes arbitraires. Ce nombre est lié au pseudo-groupe  $\Phi$  par le théorème suivant :

---

<sup>3</sup>La fonction  $f$  n'est pas fixée.

**Théorème 0.1** Soit  $\varphi \in \Phi$  telle que  $\mathcal{E}_{\bar{f}} = \varphi_* \mathcal{E}_f$ . Le nombre de constantes arbitraires dont dépend la transformation  $\varphi$  est égal à la dimension du pseudo-groupe de symétries  $\mathcal{S}_{\bar{f}} := \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_{\bar{f}}) \cap \Phi$  où  $\text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_{\bar{f}})$  désigne le pseudo-groupe de symétries de contact locales de l'équation cible  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ .

Lorsque  $\Phi$  est choisi tel que  $\dim(\mathcal{S}_{\bar{f}}) = 0$ , intuitivement la transformation  $\varphi$  s'obtient *sans* intégrer d'équations différentielles, uniquement en résolvant des équations algébriques.

**C'est cette idée que nous allons développer tout au long de cette thèse.** Nous allons montrer comment calculer  $\varphi$  lorsque les hypothèses  $(\mathcal{H})$  suivantes sont satisfaites :

- |   |  |
|---|--|
| <b>Hypothèses <math>(\mathcal{H})</math> :</b><br>(1) Le pseudo-groupe de Lie $\mathcal{S}_{\bar{f}}$ est de dimension 0.<br>(2) Les équations de définition du pseudo-groupe de Lie $\Phi$ sont données par des polynômes différentiels.<br>(3) La fonction $\bar{f}$ est rationnelle. |  |
|---|--|

Dans le chapitre 2, nous montrons que la transformation  $\varphi$  ainsi que les conditions portant sur  $f$  pour que  $\varphi$  existe s'obtiennent en appliquant l'algorithme ROSENFELD-GRÖBNER directement au système EDP vérifié par  $\varphi$ . Cependant cette méthode *de force brute* marche rarement à cause du grossissement des formules. De plus il est difficile d'estimer, à priori, le temps nécessaire pour effectuer ce calcul d'élimination.

Les calculs que nous allons mener reposent sur la notion d'*invariant différentiel* pour le problème d'équivalence  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$  avec  $\Phi \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(M)$  où  $M$  désigne la variété définie par  $\mathcal{E}_f$ . On appelle invariant différentiel un opérateur différentiel (i.e. une fonctionnelle)

$$I : f \rightarrow I_f \quad (f \text{ et } I_f \text{ sont des fonctions définies sur } M)$$

tel que pour toute transformation  $\bar{x} = \varphi(x)$  de  $M$  dans  $M$ ,

$$\mathcal{E}_{\bar{f}} = \varphi_*(\mathcal{E}_f) \implies I_{\bar{f}}(\bar{x}) = I_f(x).$$

La somme, le produit et le quotient de deux invariants différentiels est un invariant différentiel ; l'ensemble des invariants différentiels est donc un corps. Les fonctions  $I_f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sont appelées *invariants spécialisés*. Elles sont invariantes sous l'action du pseudo-groupe de symétries  $\mathcal{S}_f$  de l'équation  $\mathcal{E}_f$ .

Notre point de départ est le théorème suivant

**Théorème 0.2 (Olver)** La dimension du pseudo-groupe de symétries  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  est nulle s'il existe  $m = \dim(M)$  invariants spécialisés fonctionnellement indépendants.

Maintenant, pour obtenir le changement de variables  $\varphi$  il faut en principe résoudre un système infini d'équations obtenu en posant l'égalité des invariants. Voyons comment contourner cette difficulté. Posons  $F_k := I_{\bar{f}}^k$ ,  $1 \leq k \leq m$ . Le théorème précédent permet de déduire que le système

$$\{F_1(\bar{x}) = I^1, \dots, F_m(\bar{x}) = I^m\}$$

est localement inversible. On inverse ce système par un calcul d'ensemble caractéristique (sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , les fonctions  $\{F_k\}_{1 \leq k \leq m}$  sont algébriques et le plus souvent

rationnelles), ce qui permet d'obtenir la transformation algébrique

$$\bar{x} = F^{-1}(I^1, \dots, I^m)$$

ou encore, en spécialisant les invariants  $I^i$  sur la fonction  $f$

$$\bar{x} = F^{-1}(I_f^1, \dots, I_f^m). \quad (3)$$

Lorsque le degré<sup>4</sup> en  $\bar{x}$  de la transformation (3) est égal à un, le changement de variables  $\varphi$  cherché est la transformation rationnelle définie par (3). Dans le cas général, l'idée est de comparer le degré de la transformation (3) avec celui de la transformation  $\varphi$ .

**Théorème 0.3** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La transformation  $\bar{x} = \varphi(x)$  est algébrique.*
- (ii)  $\dim(\mathcal{S}_{\bar{f}}) = 0$ .
- (iii)  $\text{card}(\mathcal{S}_{\bar{f}}) < \infty$ .

*Dans ce cas, le nombre d'éléments de  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  est égal au degré en  $\bar{x}$  de la transformation  $\varphi$ .*

La démonstration nécessite l'adoption du point de vue des  $\mathcal{D}$ -groupoïdes. A tout pseudo-groupe  $\Phi$  on associe un  $\mathcal{D}$ -groupoïde  $\mathcal{G}(\Phi)$ . En particulier, au problème d'équivalence  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$  on associe le  $\mathcal{D}$ -groupoïde  $\mathcal{G}(\mathcal{E}_f, \Phi)$ , voir définition 2.11 page 54. Notons par  $\mathcal{G}_{\bar{f}}$  le revêtement algébrique sur  $M$  défini par

$$\mathcal{G}_{\bar{f}} := \{(j_x f, j_x \varphi, j_{\bar{x}} \bar{f}) \in \mathcal{G}(\mathcal{E}_f, \Phi) \mid \bar{f} \text{ déterminée, } \bar{x} = \varphi(x)\}.$$

Il s'agit alors de prouver que les deux variétés  $\mathcal{G}(\mathcal{S}_{\bar{f}})$  et  $\mathcal{G}_{\bar{f}}$  sont équivalentes par une transformation bi-rationnelle.

A l'instar du changement de variables, le pseudo-groupe discret  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  s'obtient en théorie en résolvant un système infini d'équations. Là aussi, on arrive à contourner cette difficulté en majorant d'abord le pseudo-groupe  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  par l'ensemble des solutions  $\sigma : x \rightarrow \bar{x}$  du système algébrique

$$(I_f^1(\bar{x}) - I_f^1(x) = 0, \dots, I_f^m(\bar{x}) - I_f^m(x) = 0),$$

et en essayant ensuite ces solutions, qui sont au nombre fini, sur l'équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ .

Maintenant, en vertu du théorème précédent on distingue deux cas. Dans le premier, le degré de la transformation (3) est égal au cardinal du pseudo-groupe  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  et par conséquent, le problème est résolu puisque le changement de variables cherché est donné par la transformation (3). Le deuxième cas correspond au cas où le degré de la transformation (3) est supérieur au cardinal  $\text{card}(\mathcal{S}_{\bar{f}})$ . Nous montrons comment utiliser les équations de définition du pseudo-groupe  $\Phi$  pour abaisser le degré de la transformation (3) jusqu'à ce qu'il soit égal au degré minimal  $\text{card}(\mathcal{S}_{\bar{f}})$ . Il s'agit d'une heuristique importante qui nous évitera de parcourir l'arbre des invariants.

Nous mettrons l'accent sur le fait que le calcul du changement de variables en fonction des invariants permet de compresser, de façon significative, la taille des formules.

---

<sup>4</sup>Il s'agit du nombre générique de points  $\bar{x} \in M$  lorsque le point  $x \in M$  et la fonction  $f$  sont fixés.



LA CONTRIBUTION PRINCIPALE DE CETTE THÈSE est une architecture d'un nouveau solveur d'équations différentielles du 2eme ordre qui complète le solveur actuel de MAPLE en l'améliorant grandement. Ce nouveau solveur s'appuie sur un précalcul fait une fois pour toutes et rangé dans une table. Il s'agit de déterminer pour chaque équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  du livre de Kamke :

- 1- les pseudo-groupes maximaux  $\Phi$  pour lesquels le pseudo-groupe de symétries  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  de l'équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  est discret,
- 2- le changement de variable  $\varphi \in \Phi$  qui envoie l'équation générique  $\mathcal{E}_f$  sur l'équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ .

A l'appel du solveur pour une équation différentielle  $\mathcal{E}_f$  donnée, celui-ci teste l'équivalence avec chacune des équations de la table en spécialisant d'abord le changement de variables  $\varphi$  sur l'équation à résoudre et en vérifiant ensuite si la transformation obtenue  $\varphi$  convient i.e. si  $\varphi \in \Phi$  et  $\varphi_*\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_{\bar{f}}$ .

L'algorithme détaillé de ce nouveau solveur est présenté dans le chapitre 6. Voici ses principaux points forts :

- Tout d'abord, comme on s'appuie sur un précalcul de  $\varphi$ , le gain espace en mémoire ainsi que temps de calcul est très important. Au chapitre 6, nous verrons que le temps de calcul nécessaire pour tester l'équivalence de  $\mathcal{E}_f$  avec une équation du livre de Kamke est de l'ordre de  $\frac{1}{100}$  secondes, ce qui fait moins de 10 secondes pour l'ensemble de la liste Kamke ( $\simeq 500$  équations).
- De plus, notre solveur améliore sensiblement les solveurs actuel. On résout les équations admettant un groupe de symétrie de dimension 0 ainsi que des équations pour lesquelles le solveurs actuels, appliquant la méthode de Lie, échouent dans la résolution de l'équation réduite ou dans le calcul de la quadrature qui en découle.
- Contrairement à la méthode de Lie, notre solveur ainsi que la construction de la table ne fait intervenir aucune intégration d'équations différentielles.

LE PLAN de cette thèse est le suivant : Le premier chapitre comporte trois parties. La première partie est une courte introduction à la théorie des diffiétés. Dans la deuxième partie on rappellera les principaux résultats sur les systèmes différentiels extérieurs d'Elie Cartan. La dernière partie est consacrée aux pseudo-groupes de Lie. Nous y introduisons les notions de problème d'équivalence et d'invariant différentiel.

Au deuxième chapitre, après un bref rappel sur l'algèbre différentielle, nous verrons comment traiter les problèmes d'équivalence à l'aide de ROSENFELD-GRÖBNER. Nous donnons les limitations cette approche et nous prouvons les deux théorèmes 0.1 et 0.3 rappelés dans cette introduction.

Le troisième chapitre traite la méthode d'équivalence de Cartan. Nous présenterons les  $G$ -structures et le théorème 0.2. Nous verrons également comment formuler un problème d'équivalence dans le langage des  $G$ -structures.

Le chapitre 4 sur les symétries des diffiétés est destiné à préparer l'exposé au chapitre suivant. Nous verrons, en particulier, comment calculer le pseudo-groupe de symétries d'une diffiété donnée lorsque celui-ci est de dimension nulle.

Les résultats théoriques démontrés dans le chapitre 2 sont utilisés pour justifier une méthode permettant de calculer la transformation  $\varphi$  qui réalise, sous les hypothèses ( $\mathcal{H}$ ) précédentes, l'équivalence des deux équations  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ . Nous illustrons cette méthode

sur plusieurs exemples.

Le dernier chapitre de cette thèse est consacré à la présentation d'un nouveau solveur d'équations différentielles basé sur la méthode d'équivalence de Cartan. Le solveur n'a pas encore fait l'objet d'une implantation. Un tel travail exige une collaboration étroite avec les concepteurs des solveurs actuels. Nous montrons la faisabilité d'une telle architecture en traitant complètement, tout au long de cette thèse, plusieurs équations de la liste de Kamke.



# Chapitre 1

## Préliminaires

### Introduction

La première section de ce chapitre est une très courte introduction à la théorie des diffiétés de l'école de Vinogradov & al. [KLV86, Vin89, Vin94]. Une diffiété est une variété munie d'une distribution complètement intégrable i.e. en tout point de la diffiété passe une variété intégrale et une seule. On verra que tout système EDP définit une diffiété, qui peut être de dimension infinie.

Dans la deuxième partie, on exposera la théorie des systèmes différentiels extérieurs. Nous présenterons l'algorithme général de calcul de contraintes d'intégrabilité d'un système de Pfaff linéaire. La méthode de Cartan est une application de cet algorithme. En adoptant le point de vue des systèmes différentiels extérieurs, un système EDP est vu comme un système de Pfaff linéaire. On étudie alors l'involution (l'existence d'au moins une variété intégrale) qui est moins forte que la complète intégrabilité mais qui a le mérite d'être obtenue en un nombre fini d'étapes. De plus, lorsque la diffiété est de dimension finie les deux notions, involution et complète intégrabilité coïncident.

La dernière partie est consacrée aux pseudo-groupes de Lie. On verra que tout pseudo-groupe de Lie se caractérise par l'invariance d'un certain nombre de 0-formes et de 1-formes. Nous introduisons également les notions importantes de problèmes d'équivalence, d'invariants et de systèmes complets d'invariants.

### 1.1 Un système EDP est une diffiété

#### 1.1.1 L'espace $J^\infty$

Toutes les variétés considérées sont supposées être des variétés  $\mathbb{K}$ -analytiques où  $\mathbb{K}$  désignera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soient  $X$  et  $U$  deux variétés de coordonnées locales  $x = (x^1, \dots, x^p) \in \mathbb{K}^p$  et  $u = (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{K}^n$  respectivement. Les dérivées partielles d'une fonction  $f : X \rightarrow U$  seront notées par

$$f_I(x) = \frac{\partial^\ell f(x)}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_\ell}},$$

pour tout multi-indice symétrique  $I = (i_1, \dots, i_\ell)$  de longueur  $\#I = \ell$ .

**Définition 1.1** On dira que deux fonctions de  $X$  dans  $U$  définissent le même jet d'ordre  $q$  au point  $x \in X$  si leurs développements de Taylor au point  $x$  coïncident jusqu'à l'ordre  $q$ .

Notons par  $J^q(X, U) = \bigsqcup_{x \in X} J_x^q(X, U)$ , ou tout simplement  $J^q$ , l'espace des jets d'ordre  $q$  des fonctions de  $X$  dans  $U$ . C'est une variété fibrée au-dessus de  $X$  de coordonnées locales  $(x, u^{(q)})$  avec

$$u^{(q)} := (u_I^\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq \#I \leq q).$$

**Définition 1.2** Pour toute fonction analytique  $f : X \rightarrow U$ , on appelle jet à l'ordre  $q$  de  $f$  la section  $j^q f : X \rightarrow J^q(X, U)$  obtenue en posant

$$j^q f(x) = (x, f_I(x)),$$

où  $I$  parcourt les multi-indices de longueur  $\#I \leq q$ .

Ces définitions restent valables pour  $q = \infty$ . L'espace des jets infinis  $J^\infty$  est la limite projective de la suite suivante lorsque  $k \rightarrow \infty$

$$J^0 \xleftarrow{\pi_0^1} J^1 \xleftarrow{\pi_1^2} \dots \xleftarrow{\pi_{k-1}^k} J^k \xleftarrow{\pi_k^{k+1}} J^{k+1} \xleftarrow{\pi_{k+1}^{k+2}} \dots$$

où les projections naturelles

$$\pi_k^{k+1} : J^{k+1} \rightarrow J^k$$

sont définies par

$$\pi_k^{k+1}(x, u^{(k+1)}) = (x, u^{(k)}).$$

### 1.1.2 Le module des formes de contact

Dans cette thèse, on adopte la convention de notation d'Einstein qui consiste à sommer lorsqu'un indice se trouve en haut et en bas dans une expression.

**Définition 1.3** Le module des formes de contact sur l'espace  $J^q$ ,  $q \leq \infty$  est le module engendré par les 1-formes différentielles

$$du_I^\alpha - u_{I,i}^\alpha dx^i, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq \alpha \leq n, \quad \#I < q,$$

les coefficients étant des fonctions arbitraires de  $J^q$  dans  $\mathbb{K}$ . Une forme de contact est un élément de ce module.

Les formes de contact définies sur l'espace  $J^q$  ont la propriété de s'annuler sur le graphe du jet  $j^q f$  de toute fonction  $f : X \rightarrow U$ .

**Définition 1.4** On appellera dérivations totales ou champs de Cartan, les champs de vecteurs définis sur l'espace des jets infinis  $J^\infty$  par :

$$\frac{d}{dx^i} = D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \dots + u_{I,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} + \dots$$

Restreints aux variables de l'espace des jets d'ordre  $q$ , on parlera de champs de Cartan tronqués à l'ordre  $q$ .

Les champs de Cartan tronqués à l'ordre  $q$ , sont tangents au graphe du jet  $j^q f$  de toute fonction  $f : X \rightarrow U$ . Ils sont orthogonaux aux formes de contact du  $J^q$ .

### 1.1.3 Transformations de contact

**Définition 1.5** Un difféomorphisme  $\varphi : J^q(X, U) \rightarrow J^q(\overline{X}, \overline{U})$  est dit transformation de contact d'ordre  $q$  s'il transforme une forme de contact de  $J^q(X, U)$  en une forme de contact de  $J^q(\overline{X}, \overline{U})$ . Lorsque  $q = 0$ , le difféomorphisme  $\varphi$  est appelé transformation ponctuelle.

La prolongation à l'ordre  $q+1$  d'une transformation de contact  $\varphi : J^q(X, U) \rightarrow J^q(\overline{X}, \overline{U})$  est l'unique transformation de contact de  $J^{q+1}$  qui, restreinte à l'espace des jets d'ordre  $q$ , est  $\varphi$ .

**Proposition 1.1** Soit  $\varphi : J^q(X, U) \rightarrow J^q(\overline{X}, \overline{U})$ , une transformation de contact.

$$\varphi \begin{cases} x & \rightarrow \bar{x} & = \xi(x, u^{(q)}), \\ u^{(q)} & \rightarrow \bar{u}^{(q)} & = \eta(x, u^{(q)}). \end{cases} \quad (1.1)$$

La prolongation de l'action de  $\varphi$  aux variables  $u_{I,i}^\alpha$  de  $J^{q+1}(X, U)$  est donnée par la formule suivante :

$$\varphi^*(\bar{u}_{I,i}^\alpha) = D_j(\eta_I^\alpha) \times C_i^j(\xi), \quad 1 \leq i, j \leq p, \quad 1 \leq \alpha \leq n, \quad \#I = q. \quad (1.2)$$

$D_j$  est le champ de Cartan. La matrice  $C_i^j(\xi)$  est par construction l'inverse de la matrice de fonctions  $D_j(\xi^i)$ .

**Théorème 1.1 (Lie–Bäcklund)** Une transformation de contact  $\varphi : J^q(X, U) \rightarrow J^q(\overline{X}, \overline{U})$ , d'ordre  $q$  fini, est

- (i) soit une prolongation d'une transformation de contact d'ordre 1 si  $n = 1$ ,
- (ii) soit une prolongation d'une transformation ponctuelle si  $n > 1$ .

Ce théorème est faux dans le cas infini. Une transformation  $\varphi : J^\infty \rightarrow J^\infty$  peut être la prolongation d'une transformation transverse i.e. une transformation de l'espace  $J^p$  à valeurs dans  $J^q$  où  $p$  et  $q$  sont deux entiers naturels distincts.

### 1.1.4 Diffiétés

Une *distribution* sur la variété  $M$  est un sous-fibré  $\Delta$  du fibré tangent  $TM \rightarrow M$ . On dira qu'elle est *involutive* si elle est fermée pour le crochet de champs de vecteurs i.e  $[\Delta, \Delta] \subset \Delta$ . Par exemple, l'espace des jets  $J^q$  est naturellement muni d'une distribution, dite de Cartan, engendrée par les champs de Cartan du  $J^q$ , qui n'est pas involutive. La distribution de Cartan du  $J^\infty$  est involutive.

**Définition 1.6 (diffiété)** Une diffiété  $\mathcal{E} = (M, \Delta)$  est la donnée d'une variété  $M$ , qui peut être de dimension infinie, munie d'une distribution involutive  $\Delta$ .

Un système EDP d'ordre  $q$  est un sous-fibré  $i : \mathcal{E}^q \rightarrow J^q$  du fibré  $J^q(X, U)$ . Une *solution* de ce système est une fonction  $f : X \rightarrow U$  dont le jet d'ordre  $q$  est une section de  $\mathcal{E}^q$ .

**Proposition 1.2** Un système EDP est une diffiété.

DÉMONSTRATION. Un système EDP définit, en tenant compte de l'idéal différentiel engendré par ces équations, une sous-variété de l'espace des jets infini

$$i : \mathcal{E} \hookrightarrow J^\infty.$$

On obtient une distribution involutive sur la variété  $\mathcal{E}$  en restreignant la distribution de Cartan du  $J^\infty$  sur cette variété (par le pull-back  $i^*$ ). CQFD

**Exemple 1.1** *La diffiété triviale i.e.  $J^\infty$  correspond à un système vide d'équations.*

**Exemple 1.2** *L'équation différentielle*

$$u^{(n+1)} = f(x, u, u', \dots, u^{(n)}), \quad x, u \in \mathbb{K}$$

définit une diffiété finie  $\mathcal{E}_f = (M, \Delta_f)$ .

Concrètement, soit  $(x, u, u_1 = u', u_2 = u'', \dots, u_{n+1} = u^{(n+1)}, \dots)$  un système de coordonnées locales sur l'espace des jets infinis  $J^\infty(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ . La distribution de Cartan sur cet espace est engendrée par les 1-formes

$$du - u_1 dx, du_1 - u_2 dx, \dots, du_n - u_{n+1} dx, \dots \quad (1.3)$$

L'équation précédente définit une sous-variété du  $J^\infty(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  qui est isomorphe à l'espace  $J^n(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ . On prend alors  $M := J^n(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ . Restreignons ensuite les formes (1.3) sur  $M$ . On trouve

$$du - u_1 dx, du_1 - u_2 dx, \dots, du_n - f(x, u, u_1, \dots, u_n) dx.$$

La distribution  $\Delta_f$  est engendrée par ces formes.

## 1.2 Systèmes différentiels extérieurs

Pour un exposé détaillé, le lecteur peut consulter [Car45, Car67], [BCG<sup>+</sup>91] et [IL03]. Considérons une variété analytique  $M$  de dimension  $m$  sur  $\mathbb{K}$ . Notons par  $\Omega(M)$  l'ensemble des formes différentielles définies sur  $M$  à valeur dans  $\mathbb{K}$ . C'est un  $C^\omega(M)$ -module gradué

$$\Omega(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M).$$

**Définition 1.7 (système différentiel extérieur)** *Un système différentiel extérieur sur  $M$  est un sous-ensemble  $\Sigma$  de  $\Omega(M)$ . Le système est dit de Pfaff lorsqu'il est formé de 1-formes.*

**Définition 1.8** *Une variété intégrale d'un système extérieur  $\Sigma \subset \Omega(M)$  est une sous-variété  $i : S \hookrightarrow M$  telles que  $i^* \omega = 0$ ,  $\forall \omega \in \Sigma$ .*

Remarquons que les variétés intégrales d'un système différentiel extérieur  $\Sigma$  dépendent, uniquement, de l'idéal différentiel extérieur <sup>1</sup> engendré par les formes  $\omega \in \Sigma$ .

---

<sup>1</sup>Un sous-ensemble  $\mathcal{I} \subset \Omega(M)$  est un *idéal extérieur* s'il est fermé pour le produit extérieur par toute forme de  $\Omega(M)$  et si la somme de deux formes (de même degré) de  $\mathcal{I}$  appartient à  $\mathcal{I}$ . Un idéal extérieur  $\mathcal{I}$  qui est fermé pour la différentielle extérieure est dit *idéal différentiel extérieur*.

**Définition 1.9** *Le sous-espace  $E \subset T_x M$  est un élément intégral (on dit aussi plan intégral) du système différentiel extérieur  $\Sigma$  si  $\omega_E = 0, \forall \omega \in \Sigma$  où  $\omega_E$  désigne la restriction de  $\omega_x$  sur  $E$ .*

La sous-variété  $i : S \hookrightarrow M$  est, alors, une variété intégrale du système extérieur  $\Sigma$  si et seulement si son espace tangent  $T_x S$  est un élément intégral, en tout point  $x \in S$ . Toutefois, un élément intégral quelconque n'est pas nécessairement tangent à une variété intégrale. Le théorème de Cartan-Kähler fournit les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une variété intégrale tangente à tout plan intégral.

### 1.2.1 Complète intégrabilité

**Théorème 1.2 (Frobenius)** *Soit  $\omega^1 = 0, \dots, \omega^n = 0$  un système de Pfaff sur  $M$  satisfaisant la condition dite de complète intégrabilité*

$$d\omega^i = 0 \mod \omega^1 \cdots, \omega^n, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.4)$$

*Dans ce cas, pour tout point  $x \in M$  il existe un voisinage et un système de coordonnées locales  $y^1, \dots, y^m$  tel que localement, le module  $(\omega^1, \dots, \omega^n)$  soit engendré par  $dy^1, \dots, dy^n$ .*

Le théorème de Frobenius montre que tout système complètement intégrable peut toujours s'écrire sous la forme

$$dy^1 = 0, \dots, dy^n = 0.$$

Les variétés intégrales forment un champ de plans parallèles  $y^1 = C_1, \dots, y^n = C_n$ , où  $C_1, \dots, C_n$  sont des constantes arbitraires. On dira que le système définit un *feuilletage*, de dimension  $m - n$  et de codimension  $n$ , dont les feuilles sont les variétés intégrales.

**Remarque 1.1** *Soit  $\Delta$  la distribution formée des vecteurs  $v$  tels que  $\langle \omega^i, v \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq n$ . La condition (1.4) est équivalente à dire que la distribution  $\Delta$  est involutive i.e.  $[\Delta, \Delta] \subset \Delta$ .*

### 1.2.2 Théorème de Cartan-Kähler

Soit  $\Sigma \subset \Omega(M)$  un système différentiel extérieur *fermé*<sup>2</sup>. Pour montrer l'existence d'au moins une variété intégrale de dimension  $p$ , passant par un point générique  $x_0 \in M$ , on étudie l'existence d'un drapeau de plans intégraux

$$E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_{p-1} \subset E_p$$

tous inclus dans  $T_{x_0} M$  et tels que  $\dim(E_k) = k$  pour tout  $0 \leq k \leq p - 1$ . Cette construction est incrémentale.

---

<sup>2</sup>Le système  $\Sigma \subset \Omega(M)$  est dit *fermé* lorsque la différentielle extérieure de toute forme  $\omega \in \Sigma$ , appartient à l'idéal extérieur engendré par ces formes.



**Définition 1.10 (espace polaire)** Soit  $E_k \subset T_{x_0}M$  un élément intégral de  $\Sigma$  de dimension  $k$ . L'espace polaire de  $E_k$  est

$$H(E_k) := \{\vec{v} \in T_{x_0}M, \mid (i_{\vec{v}}\omega)_{E_k} = 0, \forall \omega \in \Sigma, \deg(\omega) \leq k+1\}$$

où  $i_{\vec{v}}\omega$  désigne le produit intérieur la forme  $\omega$  par rapport au champs de vecteur  $\vec{v}$  (voir définition page 126).

Les équations de définition de l'espace polaire  $H(E_k)$  sont appelées *système polaire* et elles sont toujours *linéaires* en les composantes du vecteur  $\vec{v}$ .

**Proposition 1.3** Soit  $E_k \subset T_{x_0}M$  un élément intégral de  $\Sigma$  de dimension  $k$  alors  $E_k \oplus \mathbb{K}\vec{v}$  est un élément intégral de  $\Sigma$  de dimension  $k+1$  si et seulement si  $\vec{v} \in H(E_k)$ .

On notera par  $\text{rp}(E_k)$  le rang du système polaire associé à l'élément intégral  $E_k \subset T_{x_0}M$ . Lorsque ce rang est stable pour une petite perturbation générique du point  $x_0$  et du plan  $E_k$ , on dit que le plan  $E_k$  est *régulier* et que le plan  $E_{k+1} = E_k \oplus \mathbb{K}\vec{v}$  est *ordinaire*. Pour un plan intégral  $E_k$  *singulier*, le rang  $\text{rp}(E_k)$  est inférieur au rang générique.

**Exemple 1.3** L'étude de l'équation de Clairaut ( $f$  étant une fonction analytique)

$$y = xy' + f(y'),$$

permet de comprendre la distinction entre plan intégral singulier et plan intégral ordinaire.

Plaçons nous sur la variété des jets  $J^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  de coordonnées locales  $(x, y, y' = p)$ . L'équation de Clairaut définit une variété  $\mathcal{E} \hookrightarrow J^1$  de dimension deux. La restriction de la forme de contact  $dy - p dx$  de l'espace  $J^1$  sur cette variété donne

$$\begin{aligned} \omega &:= d(xp + f(p)) - p dx \\ &= (x + f'(p))dp. \end{aligned}$$

Soit  $\Sigma$  le système différentiel extérieur sur  $\mathcal{E}$  donné par  $\omega = 0$ ,  $dx \neq 0$ . Un élément intégral  $E_0$  de dimension 0 est un point quelconque  $x_0 = (x_0, y_0, p_0)$  de la diffiété  $\mathcal{E}$ .

Le 1-plan  $E_1 \subset T_{x_0}\mathcal{E}$ , engendré par le vecteur  $\vec{v}$ , est un élément intégral de dimension 1 si et seulement si  $\vec{v} \in H(E_0)$  c'est à dire

$$\langle \omega; \vec{v} \rangle = 0.$$

Ce système est de rang égal à un pourvu que  $x + f'(p)$  soit non nul. Dans ce cas, on a  $dp = 0$  ( $p$  est constant), qui est l'équation des 1-plans intégraux ordinaires. Les solutions ordinaires de l'équation de Clairaut ont pour équation  $y = xC + f(C)$  où  $C$  est une constante quelconque.

Le 1-plan intégral singulier correspond à la chute du rang du système de polaire, c'est à dire à  $x + f'(p) = 0$ . Il est tangent à l'unique variété intégrale singulière définie par les équations

$$\begin{cases} x + f'(p) &= 0, \\ y - xp - f(p) &= 0 \end{cases}$$

qui est l'enveloppe de la famille de solutions ordinaires.

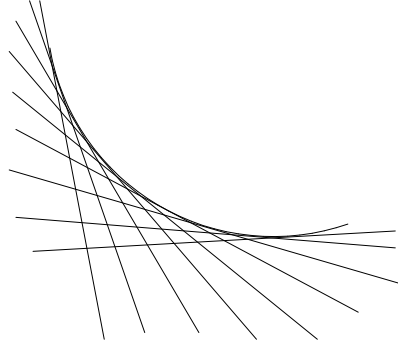


FIG. 1.1 – La solution singulière est l'enveloppe de la famille des solutions ordinaires

Dans la suite, les rangs considérés sont supposés génériques. D'après la proposition 1.3, pour que le plan intégral ordinaire  $E_p$  existe, il faut et il suffit qu'il existe un plan intégral régulier  $E_{p-1} \subset E_p$  tel que le système polaire qui lui est associé admette au moins  $p$  solutions linéairement indépendantes. Cela se traduit par la condition de rang

$$\text{rp}(E_{p-1}) \leq m - p, \quad (m = \dim M). \quad (1.5)$$

On obtient dans un voisinage de  $x_0$ , un champs de plans intégraux  $x \rightarrow E_p(x)$ . On démontre que ce champ de plans vérifie la condition de complète intégrabilité de Frobenius. Il définit donc un feuilletage et la feuille passant par  $x_0$  est alors une variété intégrale ordinaire de dimension  $p$ .

**Théorème 1.3 (Cartan–Kähler)** Soit  $x_0 \in M$  et  $\Sigma$  un système différentiel extérieur fermé sur  $M$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le système  $\Sigma$  admet un  $p$ -plan intégral ordinaire  $E_p$  passant par  $x_0$ .
- (ii) Le système  $\Sigma$  admet un  $(p-1)$ -plan intégral régulier  $E_{p-1}$ , passant par  $x_0$ , tel que  $\text{rp}(E_{p-1}) \leq m - p$ .
- (iii) Le système  $\Sigma$  admet une variété intégrale de dimension  $p$  et tangente à  $E_p$  au point  $x_0$ .

**Définition 1.11 (caractères de Cartan)** Les caractères de Cartan sont des entiers naturels définis en posant  $s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_k = \text{rp}(E_k)$ ,  $(0 \leq k \leq p-1)$ . Le pseudo-caractère  $\tilde{s}_p$  est défini en posant  $s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{p-1} + \tilde{s}_p = m - p$ .

La condition d'existence de  $p$ -plans intégraux ordinaires (1.5) se reformule alors en

$$s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{p-1} \leq m - p.$$

**Proposition 1.4** Dans les hypothèses du thm. 1.3 (Cartan–Kähler), le plan intégral ordinaire  $E_p$  dépend de  $r$  constantes réelles indépendantes avec

$$r = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \cdots + (p-1)s_{p-1} + p\tilde{s}_p.$$

### 1.2.3 Systèmes extérieurs avec condition d'indépendance

Un système différentiel extérieur avec *condition d'indépendance* est la donnée d'un système différentiel extérieur sur  $M$  et d'une  $p$ -forme  $\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p \in \Omega^p(M)$  définie à un facteur près. La propriété d'involutions signifie que la prise en compte de la condition d'indépendance  $\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p \neq 0$ , ne modifie pas le rang générique des systèmes polaires.

**Définition 1.12 (caractères réduits)** *L'espace polaire réduit de l'élément intégral  $E$  est obtenu en supprimant, dans le système polaire associé, les colonnes correspondantes aux 1-formes  $\theta^1, \dots, \theta^p$ . Les caractères réduits de Cartan  $s'_0, \dots, s'_{p-1}, \tilde{s}'_p$  sont obtenus à partir des systèmes polaires réduits par un calcul identique à celui des caractères de Cartan.*

**Théorème 1.4** *Soit  $M$  une variété,  $(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^p)$  un système de 1-formes linéairement indépendantes sur  $M$  et  $\Sigma \subset \Omega(M)$  un système différentiel extérieur fermé. On pose  $\theta = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\Sigma$  admet, en un point générique  $x \in M$ , au moins un  $p$ -plan intégral ordinaire  $E_p$  passant par  $x$  et satisfaisant la condition d'indépendance

$$\theta_{E_p} \neq 0.$$

- (ii)  $\Sigma$  admet, en un point générique  $x \in M$ , au moins une variété intégrale  $i : S \hookrightarrow M$  ordinaire passant par  $x$  et satisfaisant la condition d'indépendance

$$i^*(\theta) \neq 0.$$

- (iii) Les matrices respectives du système polaire et du système polaire réduit définissant  $E_p$  ont même rang générique i.e.

$$s_i = s'_i, \quad (0 \leq i \leq p-1).$$

- (iv) Le plan intégral ordinaire  $E_p$  dépend de  $r$  constantes arbitraires avec

$$r = s'_1 + 2s'_2 + 3s'_3 + \cdots + (p-1)s'_{p-1} + p\tilde{s}'_p.$$

**Définition 1.13 (involutions)** *Lorsque l'une des quatre conditions équivalentes du théorème précédent est vérifiée, le système extérieur  $\Sigma$  est dit en involution par rapport aux formes  $(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^p)$ .*

### 1.2.4 Prolongation d'un système différentiel extérieur

Soit  $\pi : G_p(TM) \rightarrow M$  le fibré grassmannien dont la fibre  $G_p(T_x M)$  au point  $x \in M$  est l'espace des  $p$ -plans tangents en  $x$  à la variété  $M$ . Il est canoniquement muni d'un système de Pfaff linéaire (voir définition 1.15) avec condition d'indépendance

$$I \subset J \subset \Omega^1(G_p(TM))$$

défini en tout point  $(x, E) \in G_p(TM)$  par

$$\begin{aligned} I_{(x,E)} &= \pi^*(E^\perp), \\ J_{(x,E)} &= \pi^*(T_x^* M). \end{aligned}$$

Concrètement, soit  $(x^1, \dots, x^p, u^1, \dots, u^n)$ , avec  $p + n = m$ , un système de coordonnées locales sur  $M$ . Un ouvert dans  $G_p(TM)$  est donné par les  $p$ -plans tangents à  $M$  telle que

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p \neq 0. \quad (1.6)$$

Dans cet ouvert il existe des  $\lambda_j^i \in \mathbb{K}$  tels que

$$du^i - \lambda_j^i dx^j = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.7)$$

Ainsi,  $(x^1, \dots, x^p, u^1, \dots, u^n, \lambda_1^1, \dots, \lambda_p^n)$  fournit un système de coordonnées locales de  $G_p(TM)$ . Le système de Pfaff canonique de  $G_p(TM)$  est donné par les 1-formes (1.7) et la condition d'indépendance (1.6).

**Définition 1.14** *La prolongation d'un système différentiel extérieur  $\Sigma$  est la restriction du système canonique de la variété  $G_p(TM)$  sur l'espace des  $p$ -plans intégraux ordinaires de  $\Sigma$ .*

Illustrons ce procédé sur un exemple.

**Exemple 1.4** *Considérons le système différentiel extérieur  $\Sigma$  défini sur la variété  $M$  de coordonnées locales  $(x, y, u) \in \mathbb{K}^3$*

$$\begin{cases} du \wedge dx = 0, \\ dx \wedge dy \neq 0. \end{cases}$$

*Le système de Pfaff canonique sur la variété  $G_2(TM)$  est*

$$\begin{cases} du - \lambda dx - \mu dy = 0, \\ dx \wedge dy \neq 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

*La restriction de ce système sur la sous-variété des 2-plans intégraux ordinaires se fait en deux étapes. D'abord, remplaçons, dans le système  $\Sigma$ , la forme  $du$  par  $\lambda dx + \mu dy$ . On déduit alors que  $\mu = 0$  (qui est l'équation de la sous-variété des 2-plans intégraux ordinaires). Remplaçons, ensuite, cette valeur dans (1.8). On obtient le système prolongé cherché*

$$\begin{cases} du - \lambda dy = 0, \\ dx \wedge dy \neq 0. \end{cases}$$

*Qui est bien un système de Pfaff linéaire.*

**Remarque 1.2** *D'après le théorème de Cartan-Kuranishi [Kur57], sous certaines hypothèses de régularité, un système différentiel extérieur peut être prolongé en un nombre fini d'étapes, en un système qui est soit en involution, soit incompatible.*

### 1.3 Systèmes de Pfaff linéaires

On associe au système de Pfaff

$$\begin{cases} \omega^\alpha = 0, & 1 \leq \alpha \leq n, \\ \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^p \neq 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

le drapeau de  $C^\omega(M)$ -modules

$$I \subset J \subset \Omega^1(M), \quad (1.10)$$

en posant  $I = (\omega^\alpha)$  et  $J = (\omega^\alpha, \theta^i)$  pour  $1 \leq \alpha \leq n$  et  $1 \leq i \leq p$ . On obtient une base locale  $(\omega^\alpha, \theta^i, \pi^\rho)$  de  $\Omega^1(M)$  adaptée au drapeau (1.10) en complétant la base  $(\omega^\alpha, \theta^i)$  de  $J$  par des 1-formes  $\pi^\rho \in \Omega^1 M$  ( $1 \leq \rho \leq r$ ).

**Définition 1.15** *Un système de Pfaff  $I \subset J \subset \Omega^1(M)$  est dit linéaire si et seulement si  $dI = 0 \pmod{[J]}$  où  $[J]$  est l'idéal extérieur engendré par le module  $J$ .*

### 1.3.1 Un système EDP est un système de Pfaff linéaire

Sur les espaces des jets  $J^q(X, U)$  il existe un système de Pfaff linéaire canonique avec condition d'indépendance, appelé *système de contact*. Les variétés intégrales sont les jets d'ordre  $q$  des graphes  $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in X\} \subset X \times U$  des fonctions  $f : X \rightarrow U$ . En coordonnées locales ce système de contact est donné par la  $p$ -forme  $\theta = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$  et les formes de contact

$$\omega^\alpha = du_I^\alpha - u_{I,i}^\alpha dx^i, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq \alpha \leq n, \quad \#I < q.$$

**Proposition 1.5** *Soit  $i : \mathcal{E}^q \hookrightarrow J^q$  un système EDP. La fonction  $f : X \rightarrow U$  est une solution de ce système si et seulement si le graphe de la fonction  $j^q f$  est une variété intégrale du système de Pfaff linéaire obtenu en restreignant sur  $\mathcal{E}^q$  (par le pull-back  $i^*$ ) le système de contact de  $J^q(X, U)$ .*

### 1.3.2 Equations de structure

Les *équations de structure* du système de Pfaff (1.9) s'obtiennent en calculant la différentielle extérieure des 1-formes  $\omega^\alpha$ . Lorsque le système est linéaire, on obtient

$$d\omega^\alpha = A_{\rho i}^\alpha \pi^\rho \wedge \theta^i + T_{jk}^\alpha \theta^j \wedge \theta^k \pmod{[I]}. \quad (1.11)$$

Cette linéarité est équivalente à l'inexistence des 2-formes  $\pi^\rho \wedge \pi^{\rho'}$  dans (1.11). Les coefficients  $A_{\rho i}^\alpha$  et  $T_{jk}^\alpha$  sont des éléments de  $C^\omega(M)$ . Les fonctions  $T_{jk}^\alpha$  sont appelées *éléments de torsion*, ils sont anti-symétriques en les indices  $j, k$  et dépendent de notre choix des formes  $\pi^\rho$ .

### 1.3.3 Élément de torsion essentiel

Soit  $i : S \hookrightarrow M$  une variété intégrale de dimension  $p$  du système de Pfaff (1.9). Dans ce cas

$$i^*(\theta^1) \wedge i^*(\theta^1) \wedge \cdots \wedge i^*(\theta^p) \neq 0,$$

et par conséquent les formes  $i^*(\omega^\alpha)$  et  $i^*(\pi^\rho)$  sont des combinaisons linéaires des formes  $i^*(\theta^i)$ . En particulier, il existe des coefficients  $\lambda_i^\rho \in C^\omega(M)$  tels que

$$i^*(\pi^\rho) = \lambda_i^\rho i^*(\theta^i), \quad 1 \leq \rho \leq r$$

Restreintes sur  $S$ , les 2-formes des équations de structure  $d\omega^\alpha$  sont nulles. Le calcul montre que les coefficients  $\lambda_i^\rho$  vérifient alors les conditions

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} i^* \left( T_{jk}^\alpha - A_{\rho j}^\alpha \lambda_k^\rho + A_{\rho k}^\alpha \lambda_j^\rho \right) i^* (\theta^j \wedge \theta^k) = 0, \quad (1 \leq \alpha \leq a).$$

Comme les formes  $\theta^i$  demeurent linéairement indépendantes sur toute solution  $S$ , ces équations sont équivalentes au système (en omettant le pull-back  $i^*$ )

$$T_{jk}^\alpha = A_{\rho j}^\alpha \lambda_k^\rho - A_{\rho k}^\alpha \lambda_j^\rho, \quad (1 \leq \alpha \leq a; 1 \leq j < k \leq p). \quad (1.12)$$

Ce système est linéaire en les inconnues  $\lambda_i^\rho$ , ce qui est une conséquence directe de la linéarité du système de Pfaff considéré.

Analysons les conditions portant sur les  $T_{jk}^\alpha$  pour que ce système linéaire (1.12) soit compatible. En éliminant les coefficients indéterminés  $\lambda_i^\rho$  par une procédure de pivot de Gauss, on obtient des combinaisons linéaires des fonctions  $T_{jk}^\alpha$ , appelées éléments de torsion *essentiels*, qui sont forcément nulles. Réciproquement, cette nullité assure l'existence des  $\lambda_i^\rho$ .

**Théorème 1.5** *Les éléments de torsion essentiels sont des fonctions de  $M$  dans  $\mathbb{K}$  qui s'annulent sur toute variété intégrale  $S \subset M$  du système de Pfaff linéaire  $I \subset J \subset \Omega^1 M$ , autrement dit, ce sont des contraintes d'intégrabilité.*

Il est clair que l'ensemble des éléments de torsion essentiels est un  $C^\omega(M)$ -module.

### 1.3.4 Absorption de la torsion

Dans les équations de structures, les coefficients de torsion dépendent de notre choix des formes  $\pi^\rho$ . En particulier, si on modifie les formes  $\pi^\rho$  de la manière suivante

$$\bar{\pi}^\rho := \pi^\rho + \lambda_i^\rho \theta^i, \quad \lambda_i^\rho \in C^\omega(M), \quad (1.13)$$

alors les nouveaux coefficients de torsion  $\bar{T}_{jk}^\alpha$  sont anti-symétriques en les indices  $j$  et  $k$

$$\begin{cases} \bar{A}_{\rho i}^\alpha &= A_{\rho i}^\alpha, \\ \bar{T}_{jk}^\alpha &= T_{jk}^\alpha + A_{\rho j}^\alpha \lambda_k^\rho - A_{\rho k}^\alpha \lambda_j^\rho. \end{cases} \quad (1.14)$$

L'absorption de la torsion consiste à calculer des valeurs des  $\lambda_i^\rho$ , en partant du système linéaire (1.14), de manière à fixer le maximum d'éléments  $\bar{T}_{jk}^\alpha$  à zéro. Le nombre de coefficients  $\lambda_i^\rho$  dont la valeur est arbitraire est appelé *degré d'indétermination*. C'est la dimension de la variété des  $p$ -plans intégraux passant par un point  $x \in M$ .

**Proposition 1.6** *Après le processus d'absorption de la torsion, les éléments de torsion qui restent non nuls sont des contraintes d'intégrabilité.*

Le procédé d'absorption de la torsion, outre qu'il permet de retrouver les contraintes d'intégrabilité du théorème 1.5, est un procédé particulièrement utile parce qu'il aboutit à adapter le corepère  $(\omega^\alpha, \theta^i, \pi^\rho)$  de manière à ce que les équations de structure soient *creuses* au maximum. Ainsi cette absorption rendra plus aisés les calculs ultérieurs.

### 1.3.5 Algorithme général

Les contraintes d'intégrabilité obtenues par le procédé de l'absorption de la torsion définissent une sous-variété  $i : M_1 \hookrightarrow M$ . On obtient un nouveau système de Pfaff en se restreignant sur cette sous variété. Par hypothèse, les formes  $i^*\theta^i$  doivent rester indépendantes. Dans le cas contraire, le système de départ est impossible.

Nous avons maintenant toutes les constructions utiles pour développer le calcul des contraintes d'intégrabilité d'un système de Pfaff linéaire quelconque — voir figure 3.5.

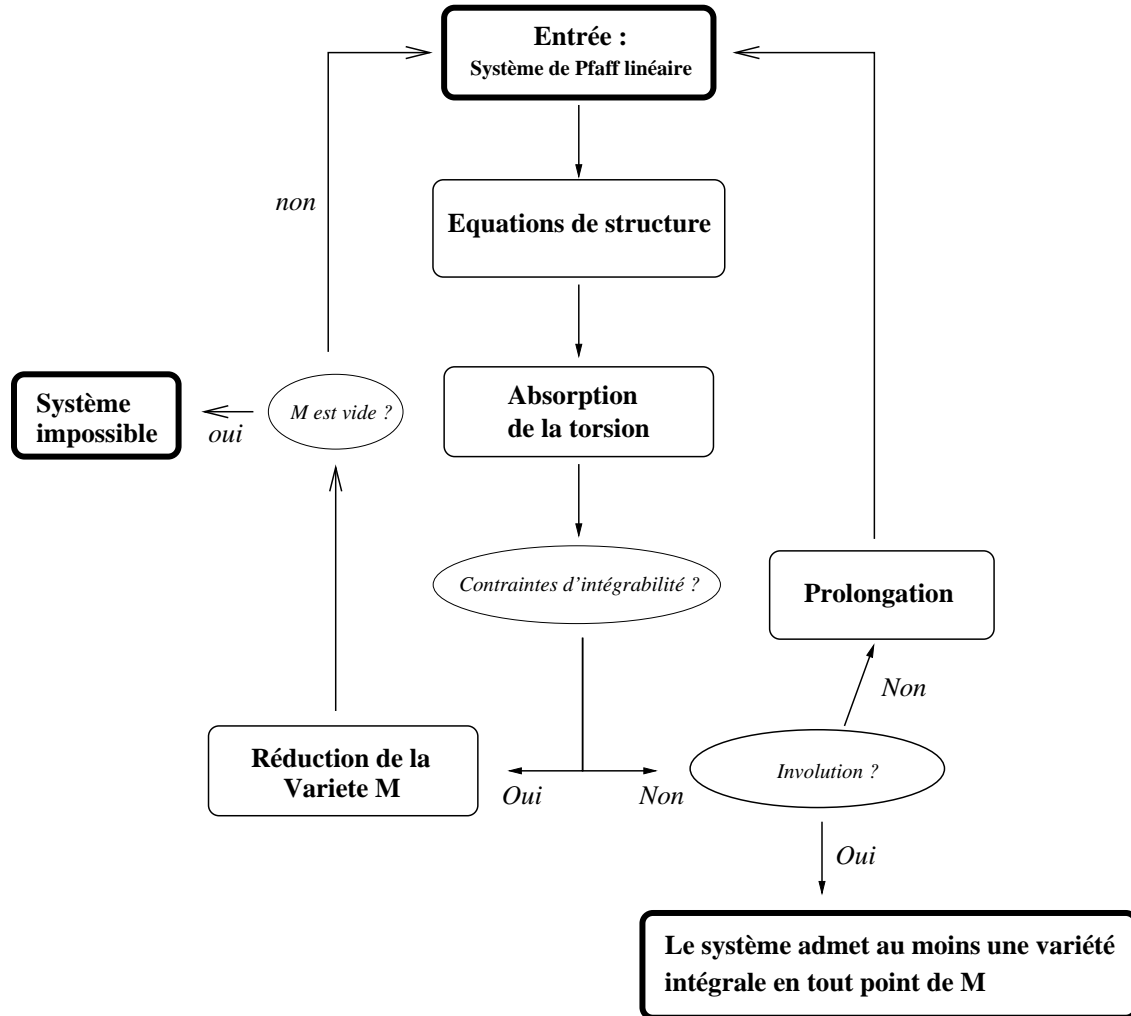


FIG. 1.2 – Algorithme de calcul des contraintes d'intégrabilité d'un système de Pfaff linéaire

## 1.4 Pseudo-groupes de Lie

La définition suivante est prise du livre [Lor05], voir aussi [SS65].

**Définition 1.16 (pseudo-groupe)** Soient  $M$  une variété analytique et  $\Phi = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$  une collection de difféomorphismes analytiques entre ouverts de  $M$ . On dira que  $\Phi$  est un pseudo-groupe sur  $M$  si les conditions suivantes sont satisfaites

- (i) si  $(\varphi : U \rightarrow V)$  appartient à  $\Phi$  alors ses restrictions  $(\varphi|_{U'} : U' \rightarrow V)$  à tout ouvert  $U' \subset U$  appartiennent aussi à  $\Phi$  ;
- (ii) un difféomorphisme  $\varphi : U \rightarrow V$  entre ouverts de  $M$  appartiennent à  $\Phi$  dès que ses restrictions  $\varphi|_{U_j} : U_j \rightarrow \varphi(U_j)$  appartiennent à  $\Phi$  pour un recouvrement ouvert (non nécessairement fini)  $U = \cup_{j \in J} U_j$  ;
- (iii) si  $\varphi : U \rightarrow V'$  et  $\psi : V \rightarrow W$  appartiennent à  $\Phi$  tel que  $V' \subseteq V$ , alors leur composition  $\psi \circ \varphi : U \rightarrow W$  appartient à  $\Phi$ .
- (iv) l'identité  $\text{Id} : U \rightarrow U$  appartient à  $\Phi$  pour tout ouvert  $U$  de  $M$ .
- (v) si  $(\varphi : U \rightarrow V)$  appartient à  $\Phi$  alors son inverse  $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$  appartient aussi à  $\Phi$ .

Voici quelques exemples [Lor05]

**Exemple 1.5** L'intersection de deux pseudo-groupes est un pseudo-groupe.

**Exemple 1.6** L'ensemble des transformations  $\text{Id} : U \rightarrow U$  forment le pseudo-groupe trivial sur  $M$ . De même, on définit le pseudo-groupe de tous les difféomorphismes analytiques entre ouverts de  $M$  que l'on notera  $\text{Diff}^{\text{loc}} M$ .

**Exemple 1.7** Le flot d'un champ de vecteur analytique  $X$  sur  $M$  définit un pseudo-groupe. Soit  $x_0 \in M$ , à chaque chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $\gamma(0) = x_0$ , on associe l'application  $\varphi_\gamma : U_\gamma \rightarrow V$  obtenue en intégrant  $X$  le long de  $\gamma$ . Ici  $U_\gamma$  est l'ouvert de  $M$  dans lequel on peut effectivement intégrer.

On dira que le pseudo-groupe  $\Phi$  sur  $M$  est *transitif* lorsque pour tous  $x, y \in M$  il existe un difféomorphisme  $(\varphi : U \rightarrow V) \in \Phi$  tels que  $x \in U$  et  $\varphi(x) = y$ .

**Définition 1.17 (prolongement holoédrique)** Soient  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  une variété fibrée au dessus de  $M$  et deux pseudo-groupes  $\Phi$  et  $\tilde{\Phi}$ , le premier opérant sur  $M$ , le second sur  $\tilde{M}$ . Si pour toute transformation  $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}$ , il existe une transformation  $\varphi \in \Phi$  telle que

$$\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi,$$

alors le pseudo-groupe  $\tilde{\Phi}$  sera dit *prolongement* de  $\Phi$ . Le prolongement sera dit *holoédrique* si la correspondance  $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$  est bi-univoque.

Deux pseudo-groupes  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sur  $M$  sont dits *semblables* s'il existe un difféomorphisme  $\phi : M \rightarrow M$  tel que  $\Phi_2 = \phi^{-1} \Phi_1 \phi$ . Ils sont dits *isomorphes* s'ils admettent des prolongements holoédriques  $\tilde{\Phi}_1$  et  $\tilde{\Phi}_2$  semblables.

**Définition 1.18 (pseudo-groupe de Lie)** Un pseudo-groupe de Lie est un pseudo-groupe formé de difféomorphismes qui sont solutions analytiques locales d'un système d'équations (et d'inéquations) aux dérivées partielles analytiques, appelées équations de définition.



Un pseudo-groupe de Lie sera dit de *dimension finie* si la solution générale de ses équations de définition dépend d'un nombre fini de constantes arbitraires. Le pseudo-groupe de Lie est de *dimension infinie* dans le cas contraire. Quand la dimension est nulle, les équations de définitions se réduisent à des équations non différentielles. On verra au chapitre 2 que la dimension d'un pseudo-groupe de Lie (défini par des équations algébro-différentielles) est égale au nombre de points sous les escaliers associés à ces équations de définition écrites sous certaine forme.

**Exemple 1.8** Les transformations  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (avec  $\beta_x \neq 0$ )

$$\begin{cases} T &= t + \alpha(x), \\ X &= \beta(x), \end{cases} \quad (1.15)$$

forment un pseudo-groupe  $\Phi \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ . Il est de Lie car il est également défini par les équations de définition

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} \neq 0.$$

De plus, il est de dimension infinie puisque le développement de Taylor d'une transformation  $\varphi$  dépend d'une infinité de constantes arbitraires.

**Exemple 1.9** Le pseudo-groupe de transformations  $(x, y) \rightarrow (f(x), f(y))$  n'est pas de Lie.

### 1.4.1 Le premier théorème fondamental de Cartan

Élie Cartan caractérise tout pseudo-groupe de Lie par l'invariance d'un certain nombre de 0-formes et de 1-formes. Plus précisément, on a (le premier théorème fondamental de Cartan)

**Théorème 1.6 (Cartan)** *Tout pseudo-groupe de Lie admet un prolongement holoédrique opérant sur un certain nombre  $r$  de variables  $x^i$  et défini comme l'ensemble des transformations qui laissent invariantes :*

- (i) *un certain nombre de fonctions des  $x^i$ ,*
- (ii)  *$r$  formes de Pfaff linéairement indépendantes par rapport aux différentielles  $dx^i$  et dont les coefficients peuvent dépendre d'autres variables auxiliaires; enfin le prolongement considéré a ses équations de définition du premier ordre.*

La démonstration de ce théorème, qui se trouve dans [Car53], est en fait un algorithme qui permet de calculer de tels invariants. Nous allons rappeler ici, sur un exemple, cet algorithme (voir aussi [LR98] et [LR00]). Pour cela, nous avons besoin d'un peu de matériel.

**Définition 1.19** *Une symétrie d'une distribution  $\Delta$  sur  $M$  est une transformation  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}} M$  telle que  $\varphi^*(\Delta) = \Delta$ .*

Dire que  $\varphi$  est symétrie de la distribution  $\Delta$  est équivalent à dire que  $\varphi$  envoie une variété intégrale de  $\Delta$  sur une autre variété intégrale.

D'après la proposition 1.5 page 26, les équations de définition d'un pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  sur  $M$  définissent une variété  $\mathcal{E}_\Phi$  munie d'une distribution  $\Delta_\Phi$ .

**Lemme 1.1 (Lie)** *Étant donné un pseudo-groupe de Lie  $\Phi \subset \text{Diff}^{\text{loc}} M$  et une transformation  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}} M$ . Les propositions suivantes sont équivalentes*

- (i)  $\varphi \in \Phi$ ,
- (ii)  $\varphi \times \text{Id} : M \times M \rightarrow M \times M$  est une symétrie des équations de définition de  $\Phi$ .

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord (1)  $\implies$  (2) : Soient  $(\varphi : U \rightarrow \varphi(U))$  et  $(\phi : V \rightarrow \phi(V))$  deux éléments de  $\Phi$  où les ouverts  $U$  et  $V$  sont tel que  $V \subseteq U$ . Notons par

$$\Gamma_\phi = \{(x, \phi(x)), x \in V\}$$

le graphe de  $(\phi : V \rightarrow \phi(V))$ . On a

$$\begin{aligned} (\varphi \times \text{Id}) \Gamma_\phi &= \{(\varphi(x), \phi(x)), x \in V\}, \\ &= \{(x, \phi \circ \varphi^{-1}(x)), x \in \varphi(V)\}. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque  $\varphi|_V, \phi \in \Phi$  alors, d'après la définition d'un pseudo-groupe,  $\phi \circ \varphi|_V^{-1}$  appartient à  $\Phi$ . Par conséquent  $(\varphi \times \text{Id}) \Gamma_\phi$  est le graphe d'une solution des équations de définition de  $\Phi$ . Ce qui montre que  $\varphi \times \text{Id}$  est une symétrie de ces équations.

Inversement, si  $\varphi \times \text{Id}$  est une symétrie alors  $\phi \circ \varphi|_V^{-1}$  appartient à  $\Phi$ . Mais comme la transformation  $\phi^{-1}$  appartient à  $\Phi$ , on en déduit que  $\varphi|_V \in \Phi$  pour tout  $V \subseteq U$  et par conséquent  $\varphi \in \Phi$ . CQFD

**Remarque 1.3** *Suivant le même raisonnement on démontre le lemme pour  $\text{Id} \times \varphi$  et  $\varphi \times \varphi$  à la place de  $\varphi \times \text{Id}$ .*

Voyons maintenant comment Cartan calcule les invariants qui caractérisent un pseudo-groupe de Lie donné en appliquant le lemme 1.1.

**Exemple 1.10 (Suite)** *Considérons le pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  (1.15) opérant sur  $M = \mathbb{R}^2$ . Ses équations de définition sont*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} \neq 0. \quad (1.16)$$

*Elles définissent une sous-variété  $\mathcal{E}_\Phi \subset J^1(M, M)$  de dimension 6 et de coordonnées locales  $(t, x, T, X, u_1 = T_x, u_2 = X_x)$ .*

*Les deux formes de contact de  $\mathcal{E}_\Phi$  s'obtiennent par restriction des deux formes de contact de l'espace des jets  $J^1(M, M)$*

$$\begin{cases} dT - T_t dt - T_x dx, \\ dX - X_t dt - X_x dx, \end{cases}$$

*en tenant compte des équations (1.16)*

$$\begin{cases} dT - dt - u_1 dx, \\ dX - u_2 dx. \end{cases}$$

*Elles engendrent une distribution (en involution)  $\Delta_\Phi$  sur la variété  $\mathcal{E}_\Phi$ . Soit  $\varphi \in \Phi$ , écrivons que la première prolongation  $\tilde{\varphi} := pr^{(1)}(\varphi \times \text{Id})$  est une symétrie de cette*

distribution i.e. qu'elle conserve le module des formes de contact de  $\mathcal{E}_\Phi$ . Pour cela, on pose

$$(\bar{t}, \bar{x}, T, X, \bar{u}_1, \bar{u}_2) := \tilde{\varphi}(t, x, T, X, u_1, u_2).$$

On en déduit l'existence d'une matrice invertible  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$  formée de 4 fonctions définies sur la sous-variété  $\mathcal{E}_\Phi$  telle que

$$\begin{pmatrix} dT - d\bar{t} - \bar{u}_1 d\bar{x} \\ dX - \bar{u}_2 d\bar{x} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} dT - dt - u_1 dx \\ dX - u_2 dx \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Le calcul donne

$$(\text{Id} - \Lambda) \begin{pmatrix} dT \\ dX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\bar{t} + \bar{u}_1 d\bar{x} \\ \bar{u}_2 d\bar{x} \end{pmatrix} - \Lambda \begin{pmatrix} dt + u_1 dx \\ u_2 dx \end{pmatrix}.$$

Puisque on a supposé que  $(\bar{t}, \bar{x}) = \varphi(t, x)$ , le membre de droite de cette égalité est une combinaison linéaire des formes  $dt$  et  $dx$ . L'indépendance des 4 coordonnées  $(t, x, T, X)$  impose que  $\text{Id} - \Lambda = 0$  et donc on a l'égalité

$$\begin{pmatrix} d\bar{t} + \bar{u}_1 d\bar{x} \\ \bar{u}_2 d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dt + u_1 dx \\ u_2 dx \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Les deux formes  $\omega^1 := dt + u_1 dx$  et  $\omega^2 := u_2 dx$  sont donc deux formes invariantes sous l'action de  $\varphi$  et  $(u_1, u_2)$  sont les deux variables auxiliaires figurant dans le théorème de Cartan page 30.

Inversement, l'invariance de  $\omega^1$  et  $\omega^2$  sous l'action de  $\varphi$  implique la relation (1.17), autrement dit le fait que  $\tilde{\varphi}$  est symétrie de la distribution  $\Delta_\Phi$ .

Nous avons ici un exemple de prolongement holoédrique. Toute transformation  $\varphi : M \rightarrow M$  se prolonge de façon unique en une transformation  $\tilde{\varphi} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  où la variété  $\tilde{M} := \mathcal{E}_\Phi$  est bien une variété fibrée au-dessus de la variété  $M$ .

## 1.4.2 Pseudo-algèbres de Lie

Étant donné un pseudo-groupe  $\Phi$  opérant sur  $M$ . Considérons pour tout ouvert  $U \subset M$  l'ensemble de champs de vecteurs analytiques  $X$  définis sur l'ouvert  $U$  dont le flot est entièrement contenu dans  $\Phi$

$$\mathcal{A}(U) = \{X \in \Gamma(TU); (\varphi_X^t : U_t \rightarrow U) \in \Phi \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

Le domaine de définition  $U_t$  de  $\varphi_X^t$  est un ouvert strict de  $U$  pour  $t \neq 0$  et devient vide dès que  $|t| \gg 0$ . On peut vérifier que si le pseudo-groupe  $\Phi$  est fermé pour la convergence uniforme sur les compacts [Lor05], alors  $\mathcal{A}(U)$  (muni de crochet de Lie sur les champs de vecteurs) est une  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie et est aussi fermée pour la topologie précédente. Ceci découle des formules

$$\varphi_{tX} = \varphi_X^t, \quad \varphi_{X+Y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \varphi_X^{1/n} \circ \varphi_Y^{1/n} \right)^n$$

et

$$\varphi_{[X,Y]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \varphi_X^{1/n} \circ \varphi_Y^{1/n} \circ \varphi_X^{-1/n} \circ \varphi_Y^{-1/n} \right)^{n^2}$$

dérivée de la formule de Campbell-Hausdorff à l'ordre 2 :

$$\varphi_X \circ \varphi_Y = \varphi_{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+o(XY)}.$$

$\mathcal{A}$  est un *faisceau* d'algèbres de Lie.

**Définition 1.20** *Étant donné un pseudo-groupe  $\Phi$  sur  $M$ , le faisceau  $\mathcal{A}$  est appelé la pseudo-algèbre de Lie associée à  $\Phi$ .*

Si le pseudo-groupe  $\Phi$  est de Lie alors il est fermé pour la convergence uniforme sur les compacts. Dans ce cas, la pseudo-algèbre de Lie associée s'obtient à partir des équations de définition de  $\Phi$  de la façon suivante : Désignons par  $x$  la variable indépendante et par  $\bar{x}$  la variable dépendante dans les équations de définition de  $\Phi$ . Les équations de définition de la pseudo-algèbre de Lie associée à  $\Phi$  se calculent en posant

$$\bar{x} = x + \varepsilon X(x) + o(\varepsilon),$$

dans les équations de définition de  $\Phi$ . Le système obtenu est un système aux dérivées partielles linéaire contraignant les composantes de  $X$ .

**Exemple 1.11** *En guise d'exemple, considérons le pseudo-groupe défini par les équations (1.16) (où maintenant  $\bar{t}$  et  $\bar{x}$  désignent les variables dépendantes)*

$$\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \neq 0.$$

Posons

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \tau(x, t) \\ \xi(x, t) \end{pmatrix}$$

dans ces équations. L'identification par rapport à  $\varepsilon$  permet d'obtenir les équations de définition de la pseudo-algèbre de Lie

$$\tau_t = 0, \quad \xi_t = 0.$$

L'intégration de ces équations montre que la pseudo-algèbre de Lie est formée de champs de vecteurs de la forme

$$X = \begin{pmatrix} \tau(x) \\ \xi(x) \end{pmatrix}$$

où  $\tau$  et  $\xi$  sont des fonctions arbitraires.

### 1.4.3 Problèmes d'équivalence

**Définition 1.21** *Un problème d'équivalence est la donnée d'une famille de diffiétés  $\mathcal{E}_f = (M, \Delta_f)$  indexées par l'élément  $f$  et un pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  qui opère sur  $M$ .*

Les deux diffiétés  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  sont dites équivalentes sous l'action du pseudo-groupe  $\Phi$  s'il existe une transformation  $\varphi \in \Phi$  telle que

$$\varphi_*(\Delta_f) \subset \Delta_{\bar{f}}.$$

L'orbite d'une diffiété  $\mathcal{E}_f$  est l'ensemble  $[\mathcal{E}_f]$  formé de toutes les diffiétés qui se ramènent à  $\mathcal{E}_f$  par une transformation  $\varphi \in \Phi$ .

**Définition 1.22 (invariant)** *Étant donné un problème d'équivalence  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$ . L'objet géométrique  $I_f$  défini sur la variété fibrée  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  est un invariant si et seulement si*

$$\forall \varphi \in \Phi : \varphi^*(\mathcal{E}_{\bar{f}}) = \mathcal{E}_f \quad \text{alors} \quad \tilde{\varphi}^*(I_{\bar{f}}) = I_f,$$

où  $\tilde{\varphi}$  est le prolongement holoédrique de  $\varphi$  sur  $\tilde{M}$ .

Dans la définition précédente l'objet géométrique  $I_f$  peut être une fonction, une forme, un champ de vecteurs, un champ de tenseurs, une connexion... etc.

**Définition 1.23** *Soit  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$  un problème d'équivalence. Un ensemble d'invariants  $\mathcal{J}$  de ce problème est dit complet si les deux conditions*

- (i)  $\varphi^*\mathcal{E}_{\bar{f}} = \mathcal{E}_f$ ,
- (ii)  $\tilde{\varphi}^*I_{\bar{f}} = I_f, \quad \forall I \in \mathcal{J}$ ,

sont équivalentes ( $\tilde{\varphi}$  est le prolongement holoédrique de  $\varphi \in \Phi$ ).

**Exemple 1.12** *Considérons le problème d'équivalence des équations différentielles autonomes*

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \quad \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$$

pour les transformations (1.15) page 30.

Pour ce problème d'équivalence, la méthode d'équivalence fournit (entre autres) la forme invariante

$$-\frac{f(x, p)}{(1 + a_1)p^2}dx + \frac{1}{p(1 + a_1)}dp,$$

définie sur la variété  $\tilde{M}$ , de coordonnées locales  $(t, x, p = \dot{x}, a_1)$ .

# Chapitre 2

## ROSENFELD-GRÖBNER et problème d'équivalence

### Introduction

Étant donné un problème d'équivalence  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$ . Nous verrons dans ce chapitre que le changement de variables  $\varphi \in \Phi$  qui réalise l'équivalence entre les deux diffiétés  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  est solution d'un certain système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles. Lorsque la fonction cible  $\bar{f}$  est fixée, le calcul des conditions que doit vérifier la fonction  $f$  pour que ce système EDP admette au moins une solution  $\varphi$  est un problème d'élimination différentielle. Ce problème peut être traité à l'aide d'un algorithme tel que ROSENFELD-GRÖBNER basé sur des techniques d'algèbre différentielle et implanté dans le système de calcul symbolique MAPLE.

Nous démontrons le théorème 2.5 page 57 qui fait le lien entre le calcul du changement de variable  $\varphi \in \Phi$  qui conjugue l'équation générique  $\mathcal{E}_f$  avec l'équation cible  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  et le pseudo-groupe de Lie de symétries  $\mathcal{S}_{\bar{f}} := \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_{\bar{f}}) \cap \Phi$ . Ce théorème constitue la contribution théorique principale de la thèse.

En fin de chapitre, nous étudierons le grossissement des formules qui apparaissent dans les calculs d'élimination. Nous verrons également qu'il est très difficile en pratique d'estimer, à priori, la durée d'un calcul. Par contre, le fait que les techniques d'algèbre différentielle ne s'appliquent qu'à des systèmes EDP construits avec des polynômes différentiels n'est pas une limitation très contraignante en pratique.

### 2.1 ROSENFELD-GRÖBNER

Dans cette section, le lecteur trouvera une présentation succincte de l'algorithme ROSENFELD-GRÖBNER, qui permet entre autre de calculer les contraintes d'intégrabilité ou d'éliminer certaines inconnues dans des systèmes EDP comportant des inéquations. Pour un exposé plus détaillé, on peut consulter [Bou94, BLOP95, Pet99, Bour].

### 2.1.1 La pseudo-division des polynômes

Soit  $k$  un corps commutatif et de caractéristique nulle. Soit  $X$  un alphabet, éventuellement infini, d'indéterminées. On note  $k[X]$  l'anneau des polynômes construits sur l'alphabet  $X$  et à coefficients dans  $k$ . On suppose  $X$  totalement ordonné et on considère un polynôme  $f \in k[X] \setminus k$ . On appelle *indéterminée principale* de  $f$  la plus grande des indéterminées  $x \in X$  qui figure dans  $f$  c'est à dire telle que  $\deg(f, x) \neq 0$ . On la note  $\text{ld}f$ . Notons  $d = \deg(f, x)$ . Le monôme  $x^d$  est appelé le *rang* de  $f$ . Le coefficient de  $x^d$  dans  $f$  est l'*initial* de  $f$ , lequel est noté  $I_f$ . Le polynôme  $\partial f / \partial x$  est le *séparant* de  $f$ , lequel est noté  $S_f$ . Ce sont tous les deux des polynômes de  $k[X]$ .

Soit  $g \in K[X]$  un autre polynôme. Supposons que l'initial de  $f$  appartienne à  $k$ . On peut alors calculer le quotient  $q$  et le reste  $r$  de la division euclidienne de  $g$  par  $f$ , vus comme des polynômes en l'indéterminée  $x$  et à coefficients dans l'anneau  $K[X \setminus \{x\}]$ .

$$\begin{array}{r|l} g & f \\ r & q \end{array}$$

Le couple  $(q, r)$  est défini de façon unique. Il satisfait

$$\deg(r, x) < \deg(f, x), \quad g = f q + r.$$

On note  $\text{quo}(g, f, x)$  le quotient et  $\text{rem}(g, f, x)$  le reste ou parfois  $\text{quo}(g, f)$  et  $\text{rem}(g, f)$  lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre. Si l'initial de  $f$  n'appartient pas à  $k$ , la division euclidienne de  $g$  par  $f$  n'est plus possible : il n'y a aucune raison pour que l'initial de  $f$  divise exactement le coefficient principal de  $g$  par rapport à  $x$ . On dispose toutefois de l'algorithme de *pseudo-division* qui consiste à multiplier  $g$  par une puissance de l'initial de  $f$  suffisante pour que les divisions par l'initial de  $f$  tombent juste. En notant  $I_f$  l'initial de  $f$  et  $a = \deg(f, x) - \deg(g, x) + 1$ ,

$$\begin{array}{r|l} I_f^a g & f \\ r & q \end{array}$$

Le couple  $(q, r)$  est défini de façon unique. Il satisfait

$$\deg(r, x) < \deg(f, x), \quad I_f^a g = f q + r.$$

On note  $\text{pquo}(g, f, x)$  le pseudo-quotient et  $\text{prem}(g, f, x)$  le pseudo-reste de  $f$  par  $g$  ou parfois  $\text{pquo}(g, f)$  et  $\text{prem}(g, f)$  lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre.

Soit  $F \subset k[X] \setminus k$  un ensemble fini ou infini. On définit  $\text{prem}(g, F)$  comme l'un des résultats possibles de l'algorithme suivant.

```

function prem(g, F)
begin
  r := g
  while  $\exists f \in F, \deg(r, \text{ld}f) \geq \deg(f, \text{ld}f)$  do
    r := prem(r, f, ld f)
  od
  return r
end

```

**Remarque 2.1** *Sans précision supplémentaire, rien ne garantit que la fonction termine. Ces précisions (utilisation de classements) sont données dans les sections qui suivent.*

### 2.1.2 Polynômes différentiels

On appelle *dérivation* sur un anneau  $R$  toute application  $\partial : R \rightarrow R$  satisfaisant les axiomes des dérivations :

$$\partial(a + b) = \partial(a) + \partial(b), \quad \partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b), \quad (\forall a, b \in R).$$

Un *anneau différentiel* est un anneau muni d'un nombre fini de dérivations supposées commuter entre elles :

$$\partial_i(\partial_j(a)) = \partial_j(\partial_i(a)) \quad (\forall a \in R).$$

De la même façon, un *corps différentiel* est un anneau différentiel qui est aussi un corps.

En algèbre différentielle, on manipule des polynômes différentiels qui sont des éléments d'une  $k$ -algèbre différentielle libre  $R = k\{U\}$ . Le corps des coefficients  $k$  est un corps différentiel commutatif de caractéristique nulle muni d'un ensemble de dérivations  $\Delta = \{\partial_1, \dots, \partial_p\}$  avec  $p \geq 0$ . L'ensemble  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  est l'ensemble des *indéterminées différentielles*.

L'ensemble  $\Delta$  engendre un monoïde commutatif

$$\Theta = \{\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_p^{\alpha_p} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}\}$$

pour l'opération de composition. Les éléments  $\theta \in \Theta$  sont les *opérateurs de dérivation* de la forme  $\theta := \partial^\alpha$  avec  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$  et  $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_p^{\alpha_p}$ . Ces opérateurs de dérivation commutent. Le monoïde  $\Theta$  agit *librement* sur l'ensemble des indéterminées différentielles  $U$ , engendrant l'ensemble infini  $\Theta U$  des *dérivées*. Les polynômes différentiels de  $R := k\{U\}$  peuvent ainsi être vus comme des polynômes au sens habituel sur l'alphabet infini des dérivées  $\Theta U$ . On a donc

$$k\{U\} = k[\Theta U].$$

**Définition 2.1 (classement)** *Un classement  $\prec$  est une relation d'ordre total sur  $\Theta U$  compatible avec l'action des dérivations sur  $\Theta U$ , c'est-à-dire qui satisfait les deux axiomes suivants :*

1.  $v \prec \partial^\alpha v \quad (\forall v \in \Theta U, \alpha \in \mathbb{N}^p, \alpha \neq (0, \dots, 0))$
2.  $v \prec w \Rightarrow \theta v \prec \theta w \quad (\forall v, w \in \Theta U, \theta \in \Theta)$

Supposons  $\Theta U$  ordonné suivant un classement. Toutes les définitions données dans la section précédente s'appliquent aux polynômes différentiels, si ce n'est qu'on dit *dérivée dominante* au lieu d'indéterminée principale.

La dérivée dominante du polynôme différentiel  $f \in R$  est notée  $v = \text{ld}(f)$ . On a

$$f = a_0 v^d + a_1 v^{d-1} + \dots + a_d, \quad (a_i \in R, 1 \leq i \leq d)$$



et  $\deg(f, v) = d$ . L'initial de  $f$  i.e. le polynôme différentiel  $a_0 \in R$  sera noté  $I_f$ . Le séparant de  $f$  est par définition

$$S_f = \frac{\partial f}{\partial v} = a_0 d v^{d-1} + a_1(d-1)v^{d-2} + \cdots + a_{d-1}.$$

**Exemple 2.1** *Considérons le polynôme différentiel ordinaire  $f \in \mathbb{Q}\{y\}$  donné par  $f = yy'^2 + y'$ . Il y a un seul classement admissible  $\cdots > y'' > y' > y$ . Dans ce cas,  $\text{ld}(f) = y'$ ,  $\deg(f, y') = 2$ ,  $I_f = y$  et  $S_f = 2yy' + 1$ .*

Soient  $f \in R$  un polynôme différentiel et  $E \subset R$  un ensemble fini de polynômes différentiels. On définit le *reste complet* de  $f$  par  $E$  pour la réduction de Ritt par

$$\text{full\_rem}(f, E) := \text{prem}(f, \Theta E).$$

Rappelons, qu'en général le résultat du calcul de **prem** n'est *pas* unique et dépend de l'ordre dans lequel la réduction effectuée.

On peut prouver que, si on le programme naturellement, c'est-à-dire en cherchant à réduire d'abord les dérivées les plus grandes vis-à-vis du classement, l'algorithme de réduction termine.

**Définition 2.2** *Un idéal  $\mathfrak{a}$  de l'anneau différentiel  $(R, \Delta)$  est dit différentiel s'il est stable par dérivation, i.e.  $\forall p \in R, \forall \partial \in \Delta, p \in \mathfrak{a} \implies \partial p \in \mathfrak{a}$ .*

Si  $E \subset R$ , on note  $[E]$  le plus petit idéal différentiel de  $R$  contenant  $E$ . On définit le *radical* de l'idéal  $\mathfrak{a}$  comme l'ensemble de tous les éléments de  $R$  dont une puissance entière appartient à  $\mathfrak{a}$ , i.e.

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{p \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}, p^n \in \mathfrak{a}\}.$$

Le radical d'un idéal différentiel  $\mathfrak{a}$  est un idéal différentiel qui contient  $\mathfrak{a}$  et noté  $\sqrt{\mathfrak{a}}$ .

### 2.1.3 Systèmes EDP comportant des inéquations

Soit  $(E = 0, S \neq 0)$  un système d'équations et d'inéquations différentielles où  $E, S \subset R$ . Informellement, une *solution* de ce système est un  $n$ -uplet de fonctions

$$\eta(x) := (\eta^1(x), \cdots, \eta^n(x)), \quad x = (x_1, \dots, x_p),$$

tel que si l'on remplace chacune des inconnues  $u^i \in U$  par la fonction  $\eta^i(x)$ , les équations et les inéquations du système sont satisfaites. Nous interprétons, dans la suite cette substitution  $\mu : u^i \rightarrow \eta^i(x)$  comme un morphisme  $\mu$  entre  $k$ -algèbres différentielles. Deux systèmes différentiels sont alors dits équivalents, s'ils admettent les mêmes solutions. Ce point de vue *sémantique* de l'équivalence complique (inutilement) la théorie car il faut alors tenir compte de l'espace de fonctions dans lequel on cherche les solutions. Considère-t-on des solutions définies localement, globalement? Sont-elles formelles, analytiques,  $C^\infty$ , analytiques par morceau etc? Doit-on s'interdire de travailler dans des espaces de distributions? Doit-on proscrire des solutions définies sur une variété complexe qui présentent de la monodromie?

Le point de vue algébrique, développé par J.F. Ritt dans les années 1930, consiste à considérer que l'on cherche les solutions dans des corps différentiels abstraits quelconques qui ne sont pas forcément des espaces fonctionnels.

Soit  $(K, \Delta)$  une extension de corps différentiel quelconque du corps de coefficients  $(k, \Delta)$ . Un  $k$ -morphisme différentiel  $\mu : R \rightarrow K$  est une application telle que

$$\begin{aligned} \mu(\alpha f + \beta g) &= \alpha \mu(f) + \beta \mu(g), & (\alpha, \beta \in k, f, g \in R) \\ \mu(f \cdot g) &= \mu(f) \cdot \mu(g), & (f, g \in R) \\ \mu(\partial f) &= \partial \mu(f), & (\forall f \in R, \forall \partial \in \Delta) \end{aligned}$$

**Définition 2.3 (solution)** Une solution  $\mu : R \rightarrow K$  du système  $(E = 0, S \neq 0)$  est un  $k$ -morphisme différentiel, à valeurs dans une extension de corps différentiel quelconque  $K$  de  $k$ , telle que

$$E \subset \ker \mu \text{ et } S \cap \ker \mu = \emptyset.$$

Il est clair que  $\ker \mu$  est un idéal différentiel qui est *premier* car  $\mu(R) \simeq R / \ker \mu$  est une algèbre sans diviseurs de zéro. Réciproquement, tout idéal différentiel premier  $\mathfrak{p} \subset R$  contenant  $E$  et ne rencontrant pas  $S$  fournit une solution dite *générique*  $\mu : R \rightarrow K$  telle que  $\mathfrak{p} = \ker \mu$ . Pour cela, on pose  $K := \text{Frac}(R/\mathfrak{p})$ , autrement dit, le corps des fractions de l'algèbre différentielle sans diviseurs de zéros  $R/\mathfrak{p}$ . Le morphisme  $\mu$  s'obtient en composant les deux morphismes canoniques  $R \rightarrow R/\mathfrak{p}$  et  $R/\mathfrak{p} \rightarrow \text{Frac}(R/\mathfrak{p})$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer une forme faible du théorème des zéros de Hilbert généralisé au cas différentiel. Soit  $R$  une  $k$ -algèbre de polynômes différentiels et  $S = \{s_1, \dots, s_\ell\}$  avec  $\ell \geq 0$  un sous-ensemble fini de  $R$ . On note

$$S^\infty := \{s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_\ell^{n_\ell} \mid n_1, \dots, n_\ell \geq 0\} \quad (2.1)$$

C'est le plus petit ensemble multiplicativement stable contenant 1 et  $S$ . Soit  $\mathfrak{a}$  un idéal différentiel de  $R$ . On définit l'idéal dit *saturé*

$$\mathfrak{a} : S^\infty := \{p \in R \mid \exists s \in S^\infty, ps \in \mathfrak{a}\}.$$

On prouve que cet idéal est différentiel et que  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} : S^\infty$ . D'autre part

$$\sqrt{\mathfrak{a} : S^\infty} = \sqrt{\mathfrak{a}} : S^\infty.$$

Dans la suite, on note  $[E]$ , l'idéal différentiel engendré par un sous-ensemble  $E \subset R$ .

**Théorème 2.1 (zéros de Hilbert)** Les polynômes  $p \in R$  tels que  $\mu(p) = 0$  pour toute solution  $\mu$  du système  $(E = 0, S \neq 0)$  constituent l'idéal différentiel radical

$$\bigcap_{\mu} \ker \mu = \sqrt{[E]} : S^\infty$$

Le système admet des solutions si et seulement si  $1 \notin \sqrt{[E]} : S^\infty$  i.e.  $\sqrt{[E]} : S^\infty \neq R$ .

**Corollaire 2.1** Soient  $E$  et  $E'$  deux sous-ensembles de  $R$ . Les deux systèmes d'équations  $(E = 0)$  et  $(E' = 0)$  ont mêmes solutions si et seulement si  $\sqrt{[E]} = \sqrt{[E']}$ .

La preuve se fait en montrant que tout idéal premier qui contient  $E$  doit contenir  $E'$  et réciproquement. Or l'intersection des idéaux premiers qui contiennent  $E$  est égale à l'idéal radical engendré par  $E$ .

Signalons une technique très importante, appelée *localisation* permettant de ramener le système  $(E = 0, S \neq 0)$  avec  $S = \{s_1, \dots, s_\ell\}$  à un système  $(E' = 0)$  comportant uniquement des équations. Comme les solutions sont cherchées dans des corps  $K$  où tout élément non nul est invertible, toute inéquation  $s \neq 0$  peut être remplacée par l'équation  $sq = 1$  où  $q$  est une nouvelle inconnue. On pose donc

$$E' := E \cup \{s_1 s_2 \dots s_\ell q - 1\} \quad (2.2)$$

Il est facile de prouver que toute solution du système  $(E = 0, S \neq 0)$  se prolonge de manière unique en une solution du nouveau système  $(E' = 0)$ . Évidemment, ce nouveau système est défini sur l'algèbre des polynômes différentiels  $R' := k\{U'\}$  avec  $U' = U \cup \{q\}$ .

**Lemme 2.1** *Avec les conventions de (2.2), on a  $\sqrt{[E]} : S^\infty = \sqrt{[E']} \cap k\{U\}$ .*

### 2.1.4 Ensembles caractéristiques

Soit  $C \subset R$  un ensemble de polynômes différentiels, muni d'un classement admissible sur les dérivées. On lui associe le système  $(C = 0, H_C \neq 0)$  où les équations sont de la forme  $f = 0$  et les inéquations  $S_f \neq 0, I_f \neq 0$  pour tout  $f \in C$ . Le polynôme  $f$  est dit *réduit* par rapport au polynôme  $g$  si pour la dérivée dominante  $v := \text{ld}g$ , on a  $\deg(f, v) < \deg(g, v)$ . Un polynôme  $f$  est dit réduit par rapport à  $C$  si  $f$  est réduit par rapport à tout polynôme de  $C$ . L'ensemble  $C$  est dit *autoréduit* si tout polynôme  $f \in C$  est réduit par rapport aux autres polynômes de  $C$ .

**Définition 2.4 (ensemble caractéristique)** *L'ensemble  $C \subset R$  est un ensemble caractéristique de l'idéal  $\mathfrak{c} := \sqrt{[C]} : H_C^\infty$  si et seulement si*

- (i)  $C$  est autoréduit
- (ii)  $\forall f \in R, \quad f \in \mathfrak{c} \iff \text{full\_rem}(f, C) = 0$

**Lemme 2.2** *L'idéal différentiel  $[C] : H_C^\infty$  est radical.*

**DÉMONSTRATION.** Montrons que  $\mathfrak{c} \subset [C] : H_C^\infty$ . Soit  $f \in \mathfrak{c}$ . Il suffit de remarquer que la condition  $\text{full\_rem}(f, C) = 0$  implique  $\exists h \in H_C^\infty, hf \in [C]$ , i.e.  $f \in [C] : H_C^\infty$ . CQFD

Un polynôme  $f \in R$  est dit *partiellement réduit* par rapport à  $C$  s'il est réduit par rapport à  $\Theta C \setminus C$ .

**Lemme 2.3** *Soit  $R_0$  l'ensemble des polynômes de  $R$  partiellement réduit par rapport à  $C$ . Alors  $R_0 \cap \sqrt{[C]} : H_C^\infty = \sqrt{(C)} : H_C^\infty$ .*

**DÉMONSTRATION.** Posons  $\mathfrak{c} := \sqrt{[C]} : H_C^\infty$ . Par définition,  $\sqrt{(C)} : H_C^\infty$  est un idéal algébrique contenu dans  $R_0$ . Démontrons l'inclusion  $R_0 \cap \mathfrak{c} \subset \sqrt{(C)} : H_C^\infty$ . Soit  $f \in R_0 \cap \mathfrak{c}$ . Comme  $f$  est partiellement réduit par rapport à  $C$ ,  $\text{full\_rem}(f, C) = \text{prem}(f, C) = 0$ . Mais  $\text{prem}(f, C) = 0$  implique  $f \in (C) : H_C^\infty$ . En fait l'idéal algébrique  $(C) : H_C^\infty$  tout comme l'idéal différentiel  $[C] : H_C^\infty$  est radical. CQFD

Ce lemme est très important parce qu'il ramène le test d'appartenance à un idéal différentiel à un test d'appartenance à un idéal algébrique *non* différentiel. L'intersection avec  $R_0$  est une réduction partielle qui utilise uniquement les polynômes  $\theta f$  pour  $f \in C$  et  $\theta \neq 1$ . Or la dérivée dominante d'un tel  $\theta f$  apparaît linéairement dans  $\theta f$ , ce qui évite le grossissement des formules.

**Définition 2.5 (Système quasi-linéaire)** *Un ensemble caractéristique  $C \subset R$  est dit quasi-linéaire si et seulement si tout élément de  $C$  est une polynôme affine en sa dérivée dominante, i.e.  $\forall f \in C, \deg(f, v) = 1$  avec  $v := \text{ld}(f)$ .*

**Lemme 2.4** *Un ensemble caractéristique  $C \subset R$  quasi-linéaire définit un idéal différentiel  $[C] : H_C^\infty \subset R$  et un idéal non différentiel  $(C) : H_C^\infty \subset R_0$  qui sont premiers.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathfrak{c} := [C] : H_C^\infty$ . Comme  $C$  est quasi-linéaire, si deux polynômes  $p, q \in R$  sont complètement réduits par rapport à  $C$ , alors le produit  $pq$  est également complètement réduit par rapport à  $C$ . Par suite, pour tout  $p, q \in R$

$$\text{full\_rem}(pq, C) = \text{full\_rem}(p, C) \cdot \text{full\_rem}(q, C)$$

La condition  $pq \in \mathfrak{c}$  est équivalente à  $\text{full\_rem}(pq, C) = 0$ , ce qui entraîne  $\text{full\_rem}(p, C) = 0$  ou  $\text{full\_rem}(q, C) = 0$  car l'anneau  $R$  est sans diviseurs de zéro. Donc  $p \in \mathfrak{c}$  ou  $q \in \mathfrak{c}$ . CQFD

**Définition 2.6 (rang d'un ensemble caractéristique)** *Soit  $C \subset R$  un ensemble caractéristique associé à un idéal premier  $\mathfrak{c} \subset R$ . On définit le rang de l'ensemble  $C$  par  $\text{rank } C := \{\text{rank}(f) \mid f \in C\}$  avec  $\forall f \in C, \text{rank}(f) := (v, d), v := \text{ld}(f)$  et  $d := \deg(f, v)$ .*

#### 2.1.4.1 L'algorithme ROSENFELD-GRÖBNER

Il prend en entrée un classement sur les dérivées et un système  $(E = 0, S \neq 0)$  de polynômes différentiels. Il produit en sortie une famille finie (éventuellement vide) d'ensembles caractéristiques  $C_i \subset R$  telle que

$$\sqrt{[E]} : S^\infty = \mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{c}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{c}_r \text{ avec } \mathfrak{c}_i := \sqrt{[C_i]} : H_{C_i}^\infty, \quad (1 \leq i \leq r).$$

Par une localisation du type (2.2), i.e. l'ajout d'une indéterminée formelle  $q$ , on se ramène au système d'équations  $(E' = 0)$  et l'algorithme calcule une décomposition

$$\sqrt{[E']} = \mathfrak{c}'_1 \cap \mathfrak{c}'_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{c}'_r.$$

où chacun des idéaux  $\mathfrak{c}'_i$  est défini par un ensemble caractéristique  $C'_i$ . La construction de ces ensembles  $C'_i$  ne sera pas abordée. A la fin, la variable  $q$  est éliminée comme dans le lemme 2.1.

#### 2.1.4.2 Exemples

Appliqué au système différentiel ordinaire  $E = (u_x^2 - 4u = 0)$  pour le classement  $\cdots > u_{xx} > u_x > u$ , ROSENFELD-GRÖBNER produit les deux ensembles caractéristiques

$$C_1 = \{u_x^2 - 4u\}, \quad C_2 = \{u\}. \quad (2.3)$$

Les systèmes associés respectivement à  $C_1$  et  $C_2$  sont

$$\Sigma_1 = \{u_x^2 - 4u = 0, u_x \neq 0\}, \quad \Sigma_2 = \{u = 0\}$$

La solution de  $\Sigma_2$  n'est pas solution de  $\Sigma_1$  car elle ne vérifie pas l'inéquation  $u_x \neq 0$ . D'autre part, la solution générale du système de départ  $\Sigma$  est  $u(x) = \frac{1}{4}\lambda^2 + \lambda x + x^2$ ; elle dépend d'une constante arbitraire  $\lambda = u_x(0)$  et définit une famille d'hyperboles. La solution  $u(x) = 0$  du système  $\Sigma_2$  ne dépend d'aucune constante arbitraire; elle est en fait une solution *singulière* dont le graphe est l'enveloppe de la famille d'hyperboles. Les solutions de  $\Sigma_1$  sont appelées solutions *ordinaires*. Ici, la solution singulière  $u(x) = 0$  n'est pas incluse dans la solution générale, même si on relâche l'inéquation  $u_x \neq 0$ .

Considérons le polynôme  $g = u_{xx} - 2$ . Il est réduit à zéro par  $C_1$  mais pas par  $C_2$ . Il n'appartient donc pas au radical de l'idéal différentiel engendré par  $\Sigma$ . Considérons le polynôme  $h = u_x$ . Il est réduit à zéro par  $C_2$  mais pas par  $C_1$ . Il n'appartient donc pas non plus au radical de l'idéal différentiel engendré par  $\Sigma$ . Le produit  $gh = u_x(u_{xx} - 2)$  est réduit à zéro par  $C_1$  et  $C_2$ . Il appartient donc au radical de l'idéal différentiel engendré par  $\Sigma$ .

Considérons le système

$$\Sigma_1 = (u_y^2 - 4u = 0, \quad u_x - v_x u = 0, \quad v_y = 0),$$

défini sur l'anneau de polynômes différentiels  $\mathbb{Q}\{u, v\}$  muni des deux dérivations  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\partial}{\partial y}$ . Pour le classement suivant :

$$\cdots > u_{xx} > u_{xy} > u_{yy} > v_{xx} > v_{xy} > v_{yy} > u_x > u_y > v_x > v_y > u > v.$$

ROSENFELD-GRÖBNER produit les deux systèmes :

$$C_1 = \{u, v_y\}, \quad C_2 = \{u_y^2 - 4u, u_x, v_y, v_x\}.$$

### 2.1.5 Élimination différentielle

L'algorithme ROSENFELD-GRÖBNER permet de faire de l'élimination différentielle dans les idéaux différentiels. Soit  $U = U_0 \sqcup U_1$  une partition de l'ensemble des inconnues  $U$  et  $\mathfrak{a} \subset k\{U\}$  un idéal différentiel. Éliminer les indéterminées appartenant à  $U_1$  consiste à calculer l'ensemble  $\mathfrak{a} \cap k\{U_0\}$  qui est un idéal différentiel de  $k\{U_0\}$ .

**Définition 2.7 (classement d'élimination)** *On dit qu'un classement de  $\Theta U$  élimine les inconnues appartenant à  $U_1$  lorsque*

$$\forall u_0 \in U_0, \forall u_1 \in U_1, \quad \forall \theta_0, \theta_1 \in \Theta, \quad \theta_0 u_0 \prec \theta_1 u_1.$$

On peut reformuler cette définition sous la forme

$$\forall f \in k\{U\}, \quad \text{Id } f \in \Theta U_0 \iff f \in k\{U_0\}$$

Le théorème suivant résout la question de l'élimination.

**Proposition 2.1** *Soit  $C \subset k\{U\}$  un ensemble caractéristique de l'idéal  $\mathfrak{c} = \sqrt{[C]} : H_C^\infty$ , calculé pour un classement éliminant  $U_1$ . Alors  $C \cap k\{U_0\}$  est un ensemble caractéristique de  $\mathfrak{c} \cap k\{U_0\}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $p \in \mathfrak{c} \cap k\{U_0\}$ . Alors la réduction de Ritt  $\text{full\_rem}(p, C) = 0$  est obtenue en utilisant les polynômes  $f \in C$  dont la dérivée dominante  $\text{ld}(f)$  appartient à  $\Theta U_0$ . D'après la remarque précédente,  $f \in k\{U_0\}$  donc  $f \in C_0$  avec  $C_0 := C \cap k\{U_0\}$ . Par suite, on a  $\text{full\_rem}(p, C_0) = 0$  et comme  $C_0$  est autoréduit, c'est bien un ensemble caractéristique de l'idéal  $\mathfrak{c} \cap k\{U_0\}$ . CQFD

### 2.1.6 Développements de Taylor des solutions

Soient  $R = k\{U\}$  avec  $k := \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_p)$  et  $\Delta := \{\partial_1, \dots, \partial_p\}$  pour  $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Soit un système  $\Sigma := (E = 0, S \neq 0)$  où  $E$  et  $S$  sont des sous-ensembles de  $R$ . Soient  $\mathbb{K}$  un corps de constantes contenant  $\mathbb{Q}$  (en pratique  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et un point de coordonnées  $a \in \mathbb{K}^p$ . Un développement de Taylor, au voisinage du point  $x = a$ , d'une fonction  $u(x)$  solution du système différentiel  $\Sigma$  est une série formelle de la forme

$$\hat{u}(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} u_\alpha(a) \frac{(x - a)^\alpha}{\alpha!},$$

avec les conventions habituelles de notations sur les multi-indices

$$\left\{ \begin{array}{ll} x &= (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \\ a &= (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p, \\ \hat{u}(x) &= (\hat{u}^1(x), \hat{u}^2(x), \dots, \hat{u}^n(x)) \in \mathbb{K}^n, \\ \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p, \\ u_\alpha^i(x) &= \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_p^{\alpha_p} u^i(x), \quad (1 \leq i \leq n) \\ \frac{(x - a)^\alpha}{\alpha!} &= \frac{(x_1 - a_1)^{\alpha_1} (x_2 - a_2)^{\alpha_2} \dots (x_p - a_p)^{\alpha_p}}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_p!}. \end{array} \right.$$

Le point clé est de remarquer que le jeu de coefficients  $u_\alpha(a) \in \mathbb{K}$  est solution d'un système algébrique infini ( $[E] = 0, S \neq 0$ ) obtenu en dérivant une infinité de fois le système d'équations ( $E = 0$ ) puis en *posant* que les symboles  $u_\alpha^i \in \Theta U$  désignent, non pas des fonctions inconnues, mais les coefficients  $u_\alpha^i(a) \in \mathbb{K}$  du développement de Taylor cherché. On considère le morphisme  $\mu : \Theta U \rightarrow \mathbb{K}$  en posant  $\mu(u_\alpha^i) := u_\alpha^i(a)$ ; il se prolonge de manière unique à l'anneau de polynômes  $R := k[\Theta U]$ .

**Définition 2.8 (Développement de Taylor)** *Un développement de Taylor solution du système différentiel ( $E = 0, S \neq 0$ ) est la donnée d'un morphisme de  $\mathbb{Q}$ -algèbres (non différentielles)  $\mu : R \rightarrow \mathbb{K}$  tel que*

$$[E] \subset \ker \mu \text{ et } S \cap \ker \mu = \emptyset.$$

## 2.1.7 Système différentiel défini par un ensemble caractéristique

### 2.1.7.1 Escaliers

Un *escalier* est un sous-ensemble de  $\Theta U$  qui est stable sous l'action des dérivations  $\partial \in \Delta$ . Soit une inconnue  $u \in U$ ,  $R$  une algèbre de polynômes différentiels muni d'un classement sur les dérivées et un ensemble (d'équations)  $E \subset R$ . On définit l'escalier  $\text{Esc}(E, u)$  comme l'escalier engendré par les dérivées dominantes des polynômes de  $E$  qui sont des dérivées de l'inconnue  $u$ , i.e.

$$\text{Esc}(E, u) := \{\partial^\alpha \text{ld}(f) \mid f \in E; \alpha \in \mathbb{N}^p\} \cap \Theta u$$

**Lemme 2.5** *Soit  $C$  un ensemble caractéristique de l'idéal différentiel  $\mathfrak{c}$ , alors pour toute inconnue  $u \in U$ ,*

$$\text{Esc}(C, u) = \text{Esc}(\mathfrak{c}, u).$$

**Exemple 2.2** *Reprenons l'exemple ci-dessus. L'ensemble caractéristique*

$$C_2 = \{u_y^2 - 4u, u_x, v_y, v_x\}$$

*définit deux escaliers associés aux inconnues  $u$  et  $v$*



FIG. 2.1 – Escaliers associés aux inconnues  $u$  et  $v$ .

### 2.1.7.2 Dimension de l'espace des solutions

Le premier point est de remarquer que grâce à la réduction de Ritt, la valeur des coefficients de Taylor  $u_\alpha^i(a)$  est complètement déterminée par la valeur des coefficients correspondant aux dérivées  $u_\alpha^i$  qui sont soit sous les escaliers, soit au fond des marches. Ces dérivées forment l'ensemble des variables qui sont partiellement réduites par rapport à l'ensemble caractéristique  $C$ . On peut formaliser cela par le lemme

**Lemme 2.6** *Le développement de Taylor  $\mu : R \rightarrow \mathbb{K}$  (voir définition 2.8) est complètement déterminé par sa restriction  $\mu : R_0 \rightarrow \mathbb{K}$ , où  $R_0$  est la  $k$ -algèbre des polynômes de  $R$  partiellement réduits par rapport à  $C$ .*

Le calcul du morphisme  $\mu : R_0 \rightarrow \mathbb{K}$  consiste à résoudre le système d'équations algébriques ( $C = 0, H_C \neq 0$ ). Le nombre de constantes arbitraires qui figurent dans ce développement de Taylor est par définition la dimension de la variété algébrique définie par l'idéal  $\mathfrak{c}_0 := (C) : H_C^\infty$ . Rappelons que la dimension d'une variété algébrique est bien définie lorsque celle-ci est irréductible, autrement dit lorsque l'idéal des équations est premier.

**Définition 2.9** Soit  $R_0$  une  $k$ -algèbre de polynômes. La dimension d'un idéal premier  $\mathfrak{p} \in R_0$  est le degré de transcendance de l'extension de corps  $K/k$  où  $K$  désigne le corps de fractions  $\text{Frac}(R_0/\mathfrak{p})$ .

Il faut se souvenir que le degré de transcendance (noté  $\text{tr deg}$ ) d'une extension de corps  $K/k$  est le nombre maximum d'éléments  $(\xi_1, \dots, \xi_d)$  du corps  $K$  qui sont  $k$ -algébriquement indépendants. Ces éléments  $\xi_i$  sont vus comme un système de coordonnées locales de la variété définie par  $\mathfrak{p}$ .

Nous allons montrer que l'idéal radical  $\mathfrak{c}_0 \subset R_0$ , qui n'est pas forcément premier, définit un ensemble algébrique dont toutes les composantes irréductibles ont même dimension dans  $\mathbb{C}$ .

**Théorème 2.2** L'idéal  $(C) : H_{\mathbb{C}}^{\infty}$  se décompose en une intersection d'idéaux premiers de même dimension. Cette dimension est égale au nombre de dérivées  $v \in \Theta U$  ne figurant dans aucun des escaliers définis par l'ensemble caractéristique  $C$ .

De manière imagée, ces points sont *sous* les escaliers définis par l'ensemble caractéristique  $C$ . La preuve rigoureuse de cette proposition est assez technique (voir thèse d'habilitation [Bou]). En fait, il s'agit de formuler précisément le fait que les inconnues sous l'escalier sont transcendentes, i.e. ne sont reliées par aucune relation  $k$ -algébrique et que chacune des inconnues "au fond d'une marche" est reliée aux variables transcendentes par une équation algébrique et une seule. On montre que ces équations algébriques définissent une *intersection complète*, autrement dit, chaque équation fait diminuer de un la dimension de la variété des solutions calculée dans  $\mathbb{C}$ .

**Corollaire 2.2** Soit  $C$  un ensemble caractéristique. Le développement de Taylor d'une solution formelle  $\hat{u} : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^n$  du système différentiel  $(C = 0, H_C \neq 0)$  dépend génériquement de  $d$  constantes arbitraires où  $d$  est la dimension définie au thm 2.2.

## 2.1.8 Historique

L'algorithme ROSENFELD-GRÖBNER a été conçu par François Boulier [Bou94, BLOP95] qui l'a implanté dans la première version du paquetage *diffalg* de MAPLE. Ce paquetage a ensuite été amélioré par Évelyne Hubert et par François Lemaire. Cet algorithme n'utilise que l'addition, la multiplication et le test d'égalité à zéro dans le corps de base  $k$  des équations différentielles. Les principaux précurseurs de cet algorithme sont les suivants :

- L'algorithme de décomposition en ensembles caractéristiques de Ritt [Rit50] qui utilise des factorisations sur des tours d'extensions algébriques de  $K$  et ne s'applique qu'aux systèmes différentiels ordinaires.
- L'algorithme de décomposition en ensembles caractéristiques de Kolchin [Kol73] qui repose sur des opérations qui ne semblent pas algorithmiques — on ne peut donc pas vraiment parler d'algorithme.
- L'algorithme d'élimination de Seidenberg [Sei56] qui prend en entrée un polynôme  $g$  et un système  $\Sigma$  et qui décide si  $g$  appartient au radical de l'idéal différentiel engendré par  $\Sigma$  mais sans décrire cet idéal.



D'autres algorithmes ont été proposés avant ROSENFELD-GRÖBNER [Wu89, Man91, RWB96] mais qui ne fournissent pas un test de décision clair pour l'appartenance au radical de l'idéal différentiel engendré par un nombre fini de polynômes différentiels.

## 2.2 Le problème d'équivalence avec cible fixée

Considérons le problème d'équivalence  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$  défini par la famille de diffiétés  $\mathcal{E}_f = (M, \Delta_f)$  et le pseudo-groupe de Lie  $\Phi \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(M)$ . Le changement de coordonnées  $\varphi \in \Phi$  qui réalise l'équivalence des deux diffiétés  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  vérifie les deux contraintes

$$\varphi_*(\Delta_f) = \Delta_{\bar{f}} \text{ et } \varphi \in \Phi. \quad (2.4)$$

La deuxième contrainte  $\varphi \in \Phi$  revient à poser que  $\varphi$  vérifie les (in)équations de définition de Lie du groupe  $\Phi$ , en particulier une inéquation traduisant l'inversibilité locale de  $\varphi$ , i.e. le déterminant de la matrice jacobienne de  $\varphi$  est non nul. Nous verrons que la première contrainte est également un système EDP.

Dans toute cette section, on suppose que l'équation cible  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  est fixée et que toutes les (in)équations du système (2.4) sont des polynômes différentiels posés comme (non) nuls. Par suite, un algorithme comme ROSENFELD-GRÖBNER sait calculer les contraintes d'intégrabilité d'un tel système, donc l'existence de  $\varphi$  est décidable. La fonction  $\bar{f}$  étant fixée, les conditions d'existence de  $\varphi$  portent sur la fonction  $f$ . Elles sont obtenues en calculant un ensemble caractéristique du système (2.4) pour un classement qui élimine  $\varphi$  par rapport à  $f$ . Nous verrons que cet ensemble caractéristique donne également le changement de variable  $\bar{x} = \varphi(x)$  lorsque  $\varphi$  existe.

### 2.2.1 Le cas des équations ordinaires du 2<sup>e</sup> ordre

Considérons par exemple, le problème d'équivalence des équations différentielles du second ordre  $y'' = f(x, y, y')$  sous l'action du pseudo-groupe de Lie  $\Phi_1 \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$  formé des transformations

$$\varphi : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x + C, \eta(x, y)), \quad (\eta_y \neq 0), \quad (2.5)$$

où  $C$  est une constante complexe arbitraire et  $\eta$  une fonction arbitraire. Les (in)équations de définition du pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  sont

$$\bar{x}_x = 1, \bar{x}_y = 0, \bar{y}_y \neq 0. \quad (2.6)$$

Une équation différentielle quelconque du second ordre  $y'' = f(x, y, y')$  définit une diffiété  $\mathcal{E}_f = (M, \Delta_f)$  de coordonnées locales  $(x, y, y' = p) \in \mathbb{C}^3$ . La distribution  $\Delta_f$  est engendrée par les deux formes  $dy - p dx$  et  $dp - f(x, y, p) dx$ .

Dire que les deux diffiétés  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  sont équivalentes par une transformation  $\varphi \in \Phi$  est équivalent à écrire (en omettant le pull back  $\varphi^*$ )

$$\begin{pmatrix} d\bar{y} - \bar{p} d\bar{x} \\ d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy - p dx \\ dp - f(x, y, p) dx \end{pmatrix}$$

en plus du fait que  $\varphi$  vérifie les équations de définition du pseudo-groupe de Lie  $\Phi$ , c'est à dire

$$d\bar{x} = dx, \quad d\bar{y} = \bar{y}_x dx + \bar{y}_y dy, \quad \bar{y}_y \neq 0.$$

L'identification par rapport aux formes de base  $dx$ ,  $dy$  et  $dp$  permet d'obtenir le système

$$\begin{aligned} \bar{p} - \bar{y}_x - p\bar{y}_y &= 0, \\ \bar{y}_{xx} + 2p\bar{y}_{xy} + p^2\bar{y}_{yy} + f(x, y, p)\bar{y}_y - \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) &= 0, \\ \bar{x}_x - 1 &= 0, \quad \bar{x}_y = 0, \quad \bar{y}_y \neq 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Remarquer que la deuxième équation de ce système représente l'action du pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  sur la famille de diffiétés  $\mathcal{E}_f$ . La fonction  $\bar{f}$  est donnée en fonction de  $f$  et du changement de variables  $(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(x, y)$ .

Supposons, maintenant, que la fonction  $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$  soit une fraction rationnelle fixée. Plaçons-nous sur l'anneau différentiel  $R = k\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, f\}$  avec comme corps de coefficients  $k := \mathbb{Q}(x, y, p)$  muni des dérivations  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  et  $\frac{\partial}{\partial p}$ . Dans ce cas, le système (2.7) doit être complété par les deux équations différentielles  $\bar{x}_p = 0$  et  $\bar{y}_p = 0$  exprimant le fait que  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  ne dépendent pas de  $p$ . On obtient la proposition

**Proposition 2.2** *Le problème d'équivalence des équations du 2<sup>e</sup> ordre sous l'action du pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  défini en (2.5) (avec cible fixée  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ ) se ramène à l'étude des contraintes d'intégrabilité du système différentiel défini sur l'anneau de polynômes  $\mathbb{Q}(x, y, p)\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, f\}$*

$$\begin{aligned} \boxed{\bar{p}} - \bar{y}_x - p\bar{y}_y &= 0, \\ \bar{y}_{xx} + 2p\bar{y}_{xy} + p^2\bar{y}_{yy} + \boxed{f} \bar{y}_y - \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) &= 0, \quad (\bar{f} \text{ fixée}) \\ \boxed{\bar{x}_x} - 1 &= 0, \quad \boxed{\bar{x}_y} = 0, \quad \boxed{\bar{x}_p} = 0, \quad \boxed{\bar{y}_p} = 0, \quad \bar{y}_y \neq 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

**Lemme 2.7** *Lorsque la fonction  $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$  est une fraction rationnelle déterminée, les équations (2.8) constituent un ensemble caractéristique quasi-linéaire pour le classement d'élimination  $f \succ \bar{p} \succ \bar{y} \succ \bar{x}$ . L'idéal différentiel associé est donc premier.*

Le changement de variables  $\varphi$  ainsi que les conditions portant sur  $f$  pour que  $\varphi$  existe s'obtiennent en appelant ROSENFELD-GRÖBNER sur le système (2.8) avec le nouveau classement  $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}] \succ f$  qui élimine les inconnues  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ .

### 2.2.1.1 L'équation d'Airy

Supposons que la diffiété  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  corresponde à l'équation d'Airy c'est à dire à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\bar{y}'' = \bar{x} \bar{y}.$$

Remplaçons  $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$  par  $\bar{x}\bar{y}$  dans le système (2.8). On trouve (la première équation de (2.8) ne joue ici aucun rôle)

$$\begin{aligned} \bar{y}_{xx} + 2p\bar{y}_{xy} + p^2\bar{y}_{yy} + f\bar{y}_y - \bar{x}\bar{y} &= 0, \\ \bar{x}_x - 1 &= 0, \quad \bar{x}_y = 0, \quad \bar{x}_p = 0, \quad \bar{y}_p = 0, \quad \bar{y}_y \neq 0. \end{aligned}$$

L'algorithme ROSENFELD-GRÖBNER pour le classement  $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}] \succ f$  donne

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{xx} &= -f\bar{y}_y + pf_p\bar{y}_y - 1/2 p^2 f_{pp}\bar{y}_y + \bar{y}f_y - 1/2 \bar{y}f_{xp} \\
&\quad - 1/2 \bar{y}f_{pp}f + 1/4 \bar{y}f_p^2 - 1/2 \bar{y}pf_{yp} \\
\bar{y}_{xy} &= -1/2 f_p\bar{y}_y + 1/2 pf_{p,p}\bar{y}_y \\
\bar{y}_{yy} &= -1/2 f_{pp}\bar{y}_y, \\
\bar{y}_p &= 0, \\
\bar{x} &= f_y - 1/2 f_{xp} - 1/2 f_{pp}f + 1/4 f_p^2 - 1/2 pf_{yp}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
f_{xyp} &= 2f_{xy} + f_pf_{xp} - 2 + p^2 f_{yyp} - f_{pp}f_x - pf_pf_{yp} \\
&\quad - 2pf_{yy} + 2pf_{ypp}f + pf_{pp}f_y - ff_{yp} \\
f_{xyp} &= 2f_{yy} - pf_{yyp} - f_{ypp}f - f_{pp}f_y + pf_{yp} \\
f_{xpp} &= f_{yp} - pf_{ypp} \\
f_{ppp} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dans cet ensemble caractéristique, le changement de variable est solution d'un système EDP formé des cinq première équations. Les autres équations forment l'ensemble caractéristique associé à l'intersection  $\sqrt{[\Sigma]} \cap k[f]$ . Elles constituent donc les conditions nécessaires et suffisantes d'équivalence. Les dérivées dominantes sont les dérivées qui figurent à gauche des équations (2.10) et (2.9). Le diagramme 2.2 montre l'escalier associée à l'indéterminée différentielle  $\bar{y}$  dans le système (2.9)

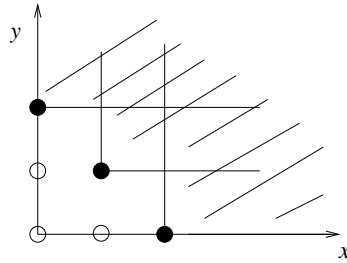


FIG. 2.2 – Escalier associé à l'indéterminée différentielle  $\bar{y}$  dans (2.9)

Les dérivées dominantes sont entourées par des petits cercles noirs. Leurs dérivées sont hachurées. Les dérivées sous l'escalier, à savoir  $\bar{y}$ ,  $\bar{y}_x$  et  $\bar{y}_y$ , sont les dérivées qui ne sont les dérivées d'aucune dérivée dominante. Ce sont celles qui figurent dans les zones non hachurées. Elles sont au nombre de 3, ce qui montre que le changement de variables dépend de 3 constantes arbitraires  $\bar{y}(0, 0)$ ,  $\bar{y}_x(0, 0)$  et  $\bar{y}_y(0, 0)$ . Le nombre de points sous l'escalier associé à  $\bar{x}$  est nul.

On a démontré la proposition suivante

**Proposition 2.3** *Une équation du second ordre  $y'' = f(x, y, y')$  est équivalente à l'équation d'Airy par une transformation de la forme  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$  si et seulement si la fonction  $f$  satisfait le système (2.10). De plus, le changement de variables est solution du système (2.9); il dépend de trois constantes arbitraires.*

### 2.2.1.2 L'équation de Painlevé PI

Supposons maintenant que l'équation cible  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  soit la première équation de Painlevé  $\bar{y}'' = 6\bar{y}^2 + \bar{x}$ . De même que l'exemple précédent, nous voulons calculer le changement de variables, de la forme (2.5) qui envoie l'équation du second ordre  $y'' = f(x, y, y')$  sur la première équation de Painlevé.

Dans ce cas, le système (2.8) s'écrit en posant  $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = 6\bar{y}^2 + \bar{x}$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{xx} + 2p\bar{y}_{xy} + p^2\bar{y}_{yy} + f\bar{y}_y - (6\bar{y}^2 + \bar{x}) &= 0, \\ \bar{x}_x - 1 = 0, \quad \bar{x}_y = 0, \quad \bar{x}_p = 0, \quad \bar{y}_p = 0, \quad \bar{y}_y \neq 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

et l'algorithme ROSENFELD-GRÖBNER donne l'ensemble caractéristique

$$\begin{aligned} \bar{y} &= 1/12 f_y - 1/24 f_{xp} - 1/24 f_{pp}f + 1/48 f_p^2 - 1/24 pf_{yp}, \\ \bar{x} &= 1/12 f_{xxy} + 1/12 p^2 f_{yyy} - 1/12 pf_{xyy} - 1/24 f_y^2 + 1/12 f f_{yy} \\ &\vdots \\ &37 \text{ termes contenant une dérivée partielle de } f \text{ par rapport à } p \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} f_{xxxxp} &= -24 + 5/2 f p f_{pp} f_p f_{yp} - 4 f_x f_{xyp} + 2 f_{xxy} - 2 p f_{yp} f_p f_{xp} \\ &\vdots \\ &+ f_p f_{xxxp} + f_y f_{xyp} + 5/2 f_{xp} f_{xyp} + 1/4 f_{xyp} f_p^2 - 2 p f_{xxyy}, \\ f_{xxyy} &= -p f_{pp} f_{yy} + 3 p f_{ypp} f_y + f_{pp} p^2 f_{yyp} - 3/2 p f_p f_{yyp} \\ &\vdots \\ &+ p f_{pp} f_{xyp} + p f_{pp}^2 f_y - p f_{pp} f_p f_{yp} - f f_{yyp} - f_y f_{yp}, \\ f_{xyyp} &= 2 f_{yyy} + f_{yp}^2 - p f_{yyy} - f_{yyp} f - 2 f_{ypp} f_y \\ &\quad - 1/2 f_{pp} f_{y,p} f + f_p f_{yyp} - 1/2 f_{pp} f_{xyp} - 1/2 f_{pp} p f_{yyp} - \\ &\quad 1/2 f_{pp}^2 f_y + 1/2 f_{pp} f_p f_{yp}, \\ f_{xpp} &= f_{yp} - p f_{ypp}, \\ f_{ppp} &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Les deux premières équations (2.12) montrent que le changement de variables est donné par des équations *non différentielles*. Nous verrons plus loin que ceci est due au fait que le pseudo-groupe de Lie de symétries de la première équation de Painlevé est discret.

Les conditions nécessaires et suffisantes sur  $f$  pour que ce changement de variables existe sont données par les cinq dernières équations (2.13).

**Proposition 2.4** *Soit  $f(x, y, p)$  une fraction rationnelle. Si l'équation  $y'' = f(x, y, y')$  se ramène à l'équation de Painlevé par un changement de variables du type  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$ , alors celui-ci est rationnel.*

**DÉMONSTRATION.** Il suffit de remarquer que les formules (2.12) donnant le changement de variables sont rationnelles en la fonction  $f$  et ses dérivées partielles par rapport aux variables  $x, y, p$ . CQFD

### 2.2.1.3 L'équation $y'' = y^3$

Dans ce dernier exemple, on veut déterminer la transformation  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$ , de la forme  $(x, y) \rightarrow (x, \eta(x, y))$  avec  $\eta_y \neq 0$ , qui ramène l'équation générique du 2<sup>e</sup> ordre  $y'' = f(x, y, y')$  à l'équation  $\bar{y}'' = \bar{y}^3$ . Les (in)équations de définition de Lie du pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  sont maintenant

$$\bar{x} = x, \bar{y}_p = 0, \bar{y}_y \neq 0. \quad (2.14)$$

À l'aide de ROSENFELD-GRÖBNER, on obtient le système caractéristique suivant

$$\begin{aligned} \bar{y}^2 &= 1/12 (4f_y - 2f_{xp} - 2f_{pp}f - 2pf_{yp} + f_p^2), \\ \bar{x} &= x, \\ f_{xxp} &= -1/12 (4f_y - 2f_{xp} - 2f_{pp}f - 2pf_{yp} + f_p^2)^{-1} \\ &\quad \times (24p^2f_{yp}^2f_y - 24p^2f_{yy}f_p f_{yp} + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 12p^2f_{x,yp}^2 + 12f^2f_{yp}^2 - 8f_{pp}^3f^3) \\ f_{xyp} &= 1/2 (4f_y - 2f_{xp} - 2f_{pp}f - 2pf_{yp} + f_p^2)^{-1} \\ &\quad \times (-4pf_{ypp}f_p f_{yp} - 4f_{xp}^2f_{yp} + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 6pf_p f_{y,yp} f_{pp}f + 2p^3f_{yyp}^2) \\ f_{xyp} &= -1/2 (4f_y - 2f_{xp} - 2f_{pp}f - 2pf_{yp} + f_p^2)^{-1} \\ &\quad \times (2f_{ypp}^2f^2 - 2f_{pp}f_{ypp}f_p f_{yp} + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 4f_{yp}^2f_{xp} + 4f_{yp}^3p + 16f_{ypp}f_y^2) \\ f_{xpp} &= f_{yp} - pf_{ypp} \\ f_{ppp} &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.2.1.4 Le problème de self-équivalence

Le (pseudo)groupe de symétries associé au problème d'équivalence est par définition  $\mathcal{S}_f := \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_f) \cap \Phi$ . Les éléments  $\sigma \in \mathcal{S}_f$  sont donc solutions du système  $\sigma^*(\mathcal{E}_f) = \mathcal{E}_f$ , ce qui correspond au problème d'équivalence quand on suppose  $f = \bar{f}$ . Les contraintes (2.10) portant sur la fonction  $f$  sont automatiquement vérifiées puisqu'il existe *au moins une* solution  $\sigma \in \Phi$  au problème de self-équivalence, à savoir la transformation identique.

Concernant l'équation d'Airy traité en section 2.2.1.1, on pose  $f(x, y, p) = xy$ . Les équations (2.9) deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_{xx} = -xy\bar{y}_y + x\bar{y}, \\ \bar{y}_{xy} = 0, \\ \bar{y}_{yy} = 0, \\ \bar{y}_p = 0, \\ \bar{x} = x. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

On en déduit que le groupe de symétries  $\mathcal{S}_f$  est un groupe continu dont la dimension est 3 i.e. le nombre de points sous l'escalier (voir figure 2.2 page 48).

Concernant l'équation Painlevé PI traité en section 2.2.1.2, on pose  $f(x, y, p) = 6y^2 + x$ . Les équations 2.12 deviennent

$$\begin{cases} \bar{x} &= x, \\ \bar{y} &= y. \end{cases} \quad (2.17)$$

On en déduit que le groupe de symétries  $\mathcal{S}_f$  est réduit à l'identité.

Concernant l'équation traitée en au paragraphe (2.2.1.3), on pose  $f(x, y, p) = y^3$ . Les équations 2.15 deviennent

$$\begin{cases} \bar{x} &= x, \\ \bar{y}^2 &= y^2. \end{cases} \quad (2.18)$$

On en déduit que le groupe de symétries est de cardinal égal à deux.

## 2.2.2 Résultats généraux

Nous allons généraliser les techniques développées dans la section précédente au problème d'équivalence des équations différentielles ordinaires d'ordre quelconque

$$y^{(n+1)} = f(x, y, y' \dots, y^{(n)}) \quad (2.19)$$

sous l'action d'un pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  inclus dans le pseudo-groupe des transformations de contact.

### 2.2.2.1 Notations

La variété  $J^n := J^n(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  désigne l'espace des jets d'ordre  $n$  des fonctions de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$  de la forme  $x \rightarrow y(x)$ . Soit  $x = (x, y, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+2}$  un système de coordonnées locales de  $J^n$ . On suppose que le pseudo-groupe de Lie  $\Phi^{(n)} := \Phi$  opère sur l'espace  $J^n$ . Pour une transformation  $\varphi \in \Phi$ , on utilise la notation  $\bar{x} = \varphi(x)$  avec  $x, \bar{x} \in J^n$ .

La distribution de Cartan de  $J^n$  est engendrée par le champ de Cartan

$$D := \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + y_n \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}.$$

Elle est donc de dimension 1.

Pour tout entier  $n \geq 0$ , on définit l'anneau de polynômes différentiels

$$R^{(n)} := \mathbb{Q}(x, y, y_1, \dots, y_n) \{ \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n \}, \quad (2.20)$$

muni des dérivations  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\}$ .

### 2.2.2.2 Équations de définition d'un pseudo-groupe de Lie

Le théorème de Bäcklund dit que toute transformation de contact  $\varphi^{(n)} : J^n \rightarrow J^n$  est le prolongement d'une unique transformation de contact  $\varphi^{(1)} : J^1 \rightarrow J^1$ .

Soit  $\Phi^{(1)}$  le pseudo-groupe de Lie obtenu à partir de  $\Phi$  en restreignant son action sur la variété  $J^1$ . La transformation  $\varphi^{(1)}$  est définie par trois fonctions

$$\begin{cases} \bar{x} &= \xi(x, y, y_1), \\ \bar{y} &= \eta(x, y, y_1), \\ \bar{y}_1 &= \eta^1(x, y, y_1), \end{cases} \quad (2.21)$$

qui ne sont pas quelconques. Elles doivent vérifier les équations de définition de Lie du pseudo-groupe de Lie  $\Phi^{(1)}$ . On peut supposer que ces équations forment un ensemble caractéristique  $C(\Phi^{(1)}) \subset R^{(1)}$ .

Les formules de prolongation de la transformation  $\varphi^{(1)}$  sont de la forme

$$\bar{y}_k = \eta^k(x, y, \dots, y_k), \quad (2 \leq k \leq n). \quad (2.22)$$

Une première prolongation montre que  $\eta^2$  est une fonction *homographique* en  $y_2$  de la forme  $\eta^2 = \frac{ay_2+b}{cy_2+d}$  où  $a, b, c, d$  sont des fonctions de  $J^1$  dans  $\mathbb{K}$ . On trouve

$$\eta^2(x, y, y_1, y_2) = \frac{d\bar{y}_1}{d\bar{x}} = \frac{D(\eta^1)}{D(\xi)} = \frac{\eta_x^1 + y_1\eta_y^1 + y_2\eta_{y_1}^1}{\xi_x + y_1\xi_y + y_2\xi_{y_1}}.$$

Les prolongations suivantes montrent que pour  $k \geq 3$ , les fonctions  $\eta^k(x, y, \dots, y_k)$  sont *affines* en la variable  $y_k$ . Pour  $k = 3$ , le calcul donne

$$\begin{aligned} \eta^3(x, y, \dots, y_3) &= \frac{d\bar{y}_2}{d\bar{x}} = \frac{1}{D(\xi)} \cdot D\left(\frac{ay_2+b}{cy_2+d}\right) \\ &= \frac{y_3(ad-bc)}{\xi_x + y_1\xi_y + y_2\xi_{y_1}} + \text{fonctions sur le } J^2. \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour tout  $k \leq n$ .

**Théorème 2.3 (prolongation)** *Si les équations de définition de Lie du pseudo-groupe de Lie  $\Phi^{(1)}$  forment un ensemble caractéristique quasi-linéaire  $C(\Phi^{(1)}) \subset R^{(1)}$  pour le classement d'élimination  $\bar{y}_1 \succ \bar{y} \succ \bar{x}$ , alors les équations de définition du pseudo-groupe de Lie prolongé  $\Phi^{(n)}$  forment un ensemble caractéristique quasi-linéaire  $C(\Phi^{(n)}) \subset R^{(n)}$  pour le classement d'élimination  $\bar{y}_n \succ \bar{y}_{n-1} \succ \dots \succ \bar{y} \succ \bar{x}$ .*

**DÉMONSTRATION.** On obtient l'ensemble caractéristique  $C(\Phi^{(n)})$  en ajoutant à l'ensemble caractéristique  $C(\Phi^{(1)})$ , les relations calculées plus haut

$$\bar{y}_k = \eta^k(x, y, \dots, y_k), \quad (2 \leq k \leq n).$$

en veillant à réduire chacune des fonctions  $\eta^k$  modulo l'ensemble caractéristique  $C(\Phi^{(1)})$ .  
CQFD

### 2.2.2.3 Action du pseudo-groupe de Lie $\Phi$ sur les équations $\mathcal{E}_f$

On associe à l'équation (2.19) la diffiété  $\mathcal{E}_f := (M, \Delta_f)$  avec  $M := J^n(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ . On pose  $\Phi := \Phi^{(n)}$  et pour tout  $\varphi \in \Phi$ ,  $\mathcal{E}_{\bar{f}} := \varphi_*(\mathcal{E}_f)$ .

Le calcul de la fonction  $\bar{f}$  est obtenu en partant de la formule de prolongation

$$\bar{y}_{n+1} = \eta^{n+1}(x, y, y_1, \dots, y_{n+1})$$

du pseudo-groupe de Lie  $\Phi^{(n+1)}$ . La substitution  $y_{n+1} = f$  et  $\bar{y}_{n+1} = \bar{f}$  donne finalement une formule de la forme

$$\bar{f}(\bar{x}) = \eta^{n+1}(x, f(x)) \text{ avec } \bar{x} = \varphi(x) \text{ et } \bar{x}, x \in M.$$

Il est important de noter que la correspondance entre les fonctions  $f$  est  $\bar{f}$  (déterminée par  $\eta^{n+1}$ ) est une transformation *affine* invertible de la forme

$$\varphi^*(\bar{f}) = af + b \text{ avec } a \neq 0, \quad (2.23)$$

où  $a, b$  sont des fonctions de  $M$  dans  $\mathbb{K}$ .

**Corollaire 2.3** *Soit  $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction rationnelle fixée une fois pour toutes. Alors la condition d'équivalence  $\mathcal{E}_f = \varphi^*(\mathcal{E}_{\bar{f}})$  pour  $\varphi \in \Phi$  est vérifiée si et seulement si le changement de variable  $\bar{x} = \varphi(x)$  et la fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{K}$  sont solutions d'un système différentiel défini par un ensemble caractéristique quasi-linéaire  $C_{f \succ \bar{x}}(\bar{f}) \subset R^{(n)}\{f\}$  pour le classement d'élimination  $f \succ \bar{y}_n \succ \dots \succ \bar{y} \succ \bar{x}$ .*

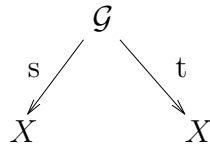
DÉMONSTRATION. L'ensemble caractéristique  $C_{f \succ \bar{x}}(\bar{f})$  est obtenu en substituant dans l'ensemble caractéristique  $C(\Phi^{n+1})$  du thm 2.3, la variable  $y_{n+1}$  par le symbole  $f$  et la variable  $\bar{y}_{n+1}$  par la fraction rationnelle  $\bar{f}(\bar{x}, \dots, \bar{y}_n)$ . CQFD

### 2.2.2.4 Le point de vue des groupoides

On sait qu'un pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  est un ensemble de triplets  $U \xrightarrow{\varphi} V$  où  $U$  et  $V$  sont des ouverts et  $\varphi$  un difféomorphisme local tel que  $V = \varphi(U)$ . La manipulation explicite des ouverts  $U$  et  $V$  est souvent lourde ; pour cette raison nous allons remplacer le difféomorphisme  $\varphi$  par son germe en un point  $x \in U$ .

**Définition 2.10** *Un groupoïde est une catégorie dont toutes les flèches sont inversibles.*

Soit  $(\mathcal{G}, X, \circ, s, t, \text{Id})$  une catégorie. Toute flèche  $\varphi$  d'une catégorie possède une source  $x = s(\varphi) \in X$  et un but  $\bar{x} = t(\varphi) \in X$  qui sont des objets de cette catégorie.



Pour toutes flèches  $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$  telles que  $s(\beta) = t(\alpha)$ , il existe une unique flèche  $\beta \circ \alpha \in \mathcal{G}$  dont la source est  $s(\alpha)$  et le but  $t(\beta)$ . Si  $\mathcal{G}$  est un groupoïde, pour toute flèche  $\varphi \in \mathcal{G}$ , il existe une unique flèche inverse  $\varphi^{-1}$  dont la source est  $t(\varphi)$  et le but  $s(\varphi)$  telle que  $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{Id}_{s(\varphi)}$ .



**Exemple 2.3** L'ensemble des triplets  $x \xrightarrow{\gamma} y$  où  $x$  et  $y$  sont des points d'une variété et  $\gamma$  un chemin quelconque allant de  $x$  à  $y$  est un groupoïde.

**Exemple 2.4** On associe à tout pseudo-groupe de Lie  $\Phi \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(M)$  un groupoïde, noté  $\mathcal{G}(\Phi)$ . Les objets sont les points  $x \in M$  et les flèches sont les développements de Taylor  $j_x \varphi$  des difféomorphismes locaux  $\varphi \in \Phi$  en  $x$ . La source du triplet est  $x$  et le but  $\bar{x} = \varphi(x)$ .

Soient  $X$  une variété et  $x \in X$ . On note  $J_*^q(X, X)$  la sous-variété de  $J^q(X, X)$  formée des jets inversibles. Alors, la variété  $J_*^q(X, X)$  est un groupoïde pour la composition des développements limités d'ordre  $q$  définie par

$$j_x^q(g \circ f) = (j_{f(x)}^q g) \circ (j_x^q f). \quad (2.24)$$

**Exemple 2.5** Lorsque  $X = \mathbb{C}$ , nous avons

$$j_x^q f := (x, f(x), f'(x), \dots, f^{(q)}(x)) \in \mathbb{C}^{q+2}.$$

- (i) Le  $q$ -jet  $j_x^q f$  est invertible si  $f'(x) \neq 0$ .
- (ii) Le  $q$ -jet de la fonction identité au voisinage du point  $x$  est  $(x, x, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{q+2}$ .
- (iii) Soient deux fonctions  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$  avec  $x, y, z \in \mathbb{C}$ . Posons  $j_x^q f = (x, y, a_1, a_2, \dots, a_q) \in \mathbb{C}^{q+2}$  et  $j_y^q g = (y, z, b_1, b_2, \dots, b_q) \in \mathbb{C}^{q+2}$ . Alors d'après (2.24), le  $q$ -jet en  $x$  de la fonction  $g \circ f$  vaut

$$j_x^q(g \circ f) = (x, z, b_1 a_1, b_1 a_2 + b_2 a_1^2, 3b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3 + b_1 a_3, \dots) \in \mathbb{C}^{q+2}.$$

- (iv) Le  $q$ -jet en  $y$  de la fonction  $f^{-1}$  inverse de la fonction  $f$  est

$$j_y^q(f^{-1}) = \left( y, x, \frac{1}{a_1}, -\frac{a_2}{a_1^3}, \frac{3a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5}, \dots \right) \in \mathbb{C}^{q+2}.$$

Par définition, un  $\mathcal{D}$ -groupoïde [Mal02] est formé des développements de Taylor solutions d'un système algébrique d'équations aux dérivées partielles appelé *équations de définition de Lie* du  $\mathcal{D}$ -groupoïde. Il comporte une inéquation qui exprime que  $\varphi$  est localement inversible.

**Définition 2.11 ( $\mathcal{D}$ -groupoïde associé à un problème d'équivalence)** Soit  $X := J^\infty(M, \mathbb{C})$ . Tout problème d'équivalence  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$ <sup>1</sup> définit un  $\mathcal{D}$ -groupoïde  $\mathcal{G}(\mathcal{E}_f, \Phi) \subset J_*^\infty(X, X)$ , formé des triplets  $(j_x f, j_x \varphi, j_{\varphi(x)} \bar{f})$  où  $x \in M$  et les fonctions  $(f, \varphi, \bar{f})$  sont des solutions locales du système différentiel

$$\varphi^*(\Delta_{\bar{f}}) = \Delta_f \text{ et } \varphi \in \Phi.$$

La source d'un triplet est alors le jet infini  $j_x f \in X$  et la cible est  $j_{\varphi(x)} \bar{f} \in X$ . La composition de deux triplets  $(j_x f, j_x \varphi_1, j_{x_1} f_1)$  et  $(j_{x_1} f_1, j_{x_1} \varphi_2, j_{x_2} f_2)$  est le triplet  $(j_x f, j_x \varphi, j_{x_2} f_2)$  où  $x_1 := \varphi_1(x)$ ,  $x_2 := \varphi_2(x_1)$  et  $\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1$ .

<sup>1</sup> $\mathcal{E}_f = (M, \Delta_f)$  est une famille de diffiétés indexées par une fonction arbitraire  $f : M \rightarrow \mathbb{K}$  et  $\Phi \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(M)$  est un pseudo-groupe de Lie.

### 2.2.2.5 Calcul du changement de variable $\varphi \in \Phi$

Dans la suite, le corps de nombres  $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ . On étudie le changement de variable  $\varphi$  solution du système différentiel

$$\mathcal{E}_f = \varphi^*(\mathcal{E}_{\bar{f}}) \text{ et } \varphi \in \Phi \quad (2.25)$$

lorsque la fonction  $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction rationnelle *fixée une fois pour toute*.

La transformation  $\varphi$  existe lorsque la fonction  $f$  définissant l'équation  $\mathcal{E}_f$  vérifie certaines contraintes. Ces contraintes sont obtenues en éliminant l'ensemble des indéterminées

$$\bar{X} := \{\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y}_n\} \quad (2.26)$$

par rapport à l'indéterminée  $f$  dans le système différentiel (2.25). D'après le corollaire 2.3, ce système différentiel est défini par l'ensemble caractéristique quasi-linéaire  $C_{f \succ \bar{x}}(\bar{f})$ . On calcule donc un nouvel ensemble caractéristique  $C_{\bar{x} \succ f}(\bar{f})$  de ce même système différentiel pour un nouveau classement qui élimine les indéterminées appartenant à  $\bar{X}$ . D'après la théorie de l'élimination différentielle, la transformation  $\varphi$  existe lorsque la fonction  $f$  satisfait le système différentiel défini par l'ensemble caractéristique

$$C_f(\bar{f}) := C_{\bar{x} \succ f}(\bar{f}) \cap \mathbb{Q}(x)\{f\} \quad (2.27)$$

La fonction  $\bar{x} = \varphi(x)$  doit alors satisfaire le système différentiel défini par l'ensemble caractéristique

$$C_{\bar{x}}(\bar{f}) := C_{\bar{x} \succ f}(\bar{f}) \setminus C_f(\bar{f}) \quad (2.28)$$

Le nombre de points sous les escaliers de cet ensemble caractéristique  $C_{\bar{x}}(\bar{f})$  est égal au nombre de constantes arbitraires dont dépend le changement de variables  $\varphi$  cherché lorsque  $f$  est solution de  $C_f(\bar{f})$ .

**Lemme 2.8** *L'idéal différentiel défini par l'ensemble caractéristique  $C_f(\bar{f})$  est premier.*

**DÉMONSTRATION.** L'ensemble caractéristique  $C_{\bar{x} \succ f}(\bar{f})$  est obtenu à partir de l'ensemble caractéristique quasi-linéaire  $C_{f \succ \bar{x}}(\bar{f})$  par une modification du classement entre les variables  $\bar{x}$  et  $f$ . Donc ils définissent le même idéal différentiel et comme l'un des ensembles caractéristiques est quasi-linéaire, cet idéal est premier.

En intersectant cet idéal premier avec l'algèbre de polynômes différentiels  $\mathbb{Q}(x)\{f\}$ , on obtient encore un idéal premier. La théorie de l'élimination nous dit que cet idéal premier est défini par l'ensemble caractéristique  $C_f(\bar{f})$ . CQFD

### 2.2.2.6 Le problème de self-équivalence

Intéressons-nous au problème de *self-équivalence*

$$\mathcal{E}_{\bar{f}} = \sigma_*(\mathcal{E}_{\bar{f}}) \text{ avec } \sigma \in \Phi. \quad (2.29)$$

Ces transformations  $\sigma : M \rightarrow M$  forment, par définition, le pseudo-groupe de Lie de symétries  $\mathcal{S}_{\bar{f}} := \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_{\bar{f}}) \cap \Phi$ .

Lorsque  $f = \bar{f}$ , les contraintes sur la fonction  $f$  définies par l'ensemble caractéristique (2.27) sont automatiquement vérifiées. Les symétries  $\sigma$  sont solutions d'un ensemble caractéristique  $C_\sigma(\bar{f})$  obtenu à partir de  $C_{\bar{x}}(\bar{f})$  en spécialisant le symbole  $f$  à  $\bar{f}(x, y, \dots, y_n)$  i.e.

$$f := \bar{f}(x, y, \dots, y_n). \quad (2.30)$$

**Lemme 2.9** *Le rang (définition 2.6 page 41) de l'ensemble caractéristique  $C_{\bar{x}}(\bar{f})$  est stable sous la spécialisation (2.30) i.e.  $\text{rank}(C_{\bar{x}}(\bar{f})) = \text{rank}(C_\sigma(\bar{f}))$ .*

DÉMONSTRATION. On définit le sous-ensemble

$$\mathcal{G}_{\bar{f}} := \{ (j_x f, j_x \varphi, j_{\bar{x}} \bar{f}) \in \mathcal{G}(\mathcal{E}_f, \Phi) \mid \bar{f} \text{ déterminée} \}.$$

$\mathcal{G}_{\bar{f}}$  est un revêtement algébrique de  $M$  défini par l'ensemble caractéristique  $C_{\bar{x}}(\bar{f})$ . Le  $\mathcal{D}$ -groupe  $\mathcal{G}(\mathcal{S}_{\bar{f}}) \subset \mathcal{G}_{\bar{f}}$  est défini par l'ensemble caractéristique  $C_\sigma(\bar{f})$ . Il opère simplement transitivement sur  $\mathcal{G}_{\bar{f}}$  (figure ci-dessus avec  $\bar{x}_0 = \varphi_0(x)$  et  $\bar{x} = \varphi(x)$ ).

$$\begin{array}{ccc} j_x f & \xrightarrow{j_x \varphi_0} & j_{\bar{x}_0} \bar{f} \\ & \searrow j_x \varphi & \downarrow j_{\bar{x}_0} \sigma \\ & & j_{\bar{x}} \bar{f} \end{array}$$

FIG. 2.3 –  $\mathcal{G}(\mathcal{S}_{\bar{f}})$  opère simplement transitivement sur  $\mathcal{G}_{\bar{f}}$ .

Choisissons un point  $\bar{x}_0$  dans  $M$ . Pour tout  $\varphi_0 \in \Phi$ , on définit la transformation rationnelle  $\mathcal{G}(\mathcal{S}_{\bar{f}}) \rightarrow \mathcal{G}_{\bar{f}}$  :

$$j_{\bar{x}_0} \sigma \rightarrow (j_{\bar{x}_0} \sigma) \circ (j_x \varphi_0), \quad (\sigma \in \mathcal{S}_{\bar{f}}).$$

Le passage aux jets permet de voir que cette correspondance est bi-rationnelle. Par conséquent les ensembles caractéristiques  $C_{\bar{x}}(\bar{f})$  et  $C_\sigma(\bar{f})$  ont la même dimension et le même degré.

La spécialisation (2.30) transforme l'ensemble caractéristique  $C_{\bar{x}}(\bar{f})$  en  $C_\sigma(\bar{f})$ . Une chute de rang de  $C_{\bar{x}}(\bar{f})$  au cours la spécialisation contredirait l'existence de la correspondance bi-rationnelle entre  $\mathcal{G}_{\bar{f}}$  et  $\mathcal{G}(\mathcal{S}_{\bar{f}})$ . CQFD

Nous pouvons maintenant résumer la discussion précédente sous la forme du

**Théorème 2.4** *La transformation  $\varphi$  conjuguant les diffiétés  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  existe pour presque toute fonction  $f$  satisfaisant le système différentiel correspondant à l'ensemble caractéristique  $C_f(\bar{f})$  défini par (2.27). Elle s'obtient en résolvant le système différentiel associé à l'ensemble caractéristique  $C_{\bar{x}}(\bar{f})$  défini par (2.28).*

*Le nombre de constantes arbitraires dont dépend la transformation  $\varphi$  est alors égal à la dimension du pseudo-groupe de Lie de symétries  $\mathcal{S}_{\bar{f}} := \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_{\bar{f}}) \cap \Phi$ .*

### 2.2.2.7 Le degré du changement de variable $\varphi \in \Phi$

Le cas le plus intéressant du point de vue de la simplicité du calcul est réalisé lorsque la transformation  $\varphi$  cherchée ne dépend d'aucune constante arbitraire. Nous allons

montrer comment calculer  $\varphi : M \rightarrow M$  avec  $M := J^n(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  en résolvant un système d'équations algébriques (non différentielles).

Considérons les couples  $(x, \bar{x}) \in M \times M$  tels qu'il existe une transformation  $\varphi \in \Phi$  solution du problème d'équivalence (2.25) avec  $\bar{x} = \varphi(x)$ . D'après le thm 2.4, le nombre de constantes arbitraires dont dépend  $\varphi$  est égal au nombre de points sous les escaliers de l'ensemble caractéristique  $C_{\bar{x}}(\bar{f})$  défini par (2.28).

Ce nombre de points est nul, si et seulement si chaque variable de l'ensemble  $\bar{X}$  défini par (2.26) apparaît comme variable principale dans l'ensemble caractéristique. C'est en particulier le cas pour les exemples (2.12) et (2.15). On en déduit que la transformation  $\bar{x} = \varphi(x)$  est algébrique. On pose

$$\begin{aligned} k &:= \mathbb{Q}(x, y, y_1, \dots, y_n)\langle f \rangle \\ A &:= k[\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n] \end{aligned}$$

où  $A$  est la  $k$ -algèbre définie par l'ensemble caractéristique  $C_{\bar{x}}(\bar{f})$ . Le corps (non différentiel)  $k$  contient les variables transcendentes  $(x, y, y_1, \dots, y_n)$  et le symbole  $f$  soumis aux relations différentielles contenues dans l'ensemble caractéristique  $C_f(\bar{f})$ . D'après le lemme 2.8, cet idéal de relations différentielles est premier et  $k$  est le corps de fractions associé.

Le degré  $[A : k]$  est, par définition, la dimension de  $A$  en tant que  $k$ -espace vectoriel. On lit le degré  $[A : k]$  dans l'ensemble caractéristique grâce au lemme suivant.

**Lemme 2.10** *Soit  $R$  une  $k$ -algèbre de polynômes et  $C \subset R$  l'ensemble caractéristique de l'idéal  $\mathfrak{c} := (C) : H_C^\infty$  supposé de dimension 0. Soit  $A := R/\mathfrak{c}$  la  $k$ -algèbre associée à  $C$ . Alors le degré  $[A : k]$  est égal au produit des degrés des variables principales figurant dans chacune des équations de  $C$ .*

**DÉMONSTRATION.** Comme l'idéal  $\mathfrak{c}$  est de dimension 0, la  $k$ -algèbre  $A$  est une extension de corps de  $k$ . Posons  $C = \{p_1, p_2, \dots, p_\ell\}$  en supposant les polynômes  $p_i$  triés par ordre croissant d'après leur dérivée dominantes, i.e.  $\text{ld}(p_1) \prec \text{ld}(p_2) \prec \dots \prec \text{ld}(p_\ell)$ . Considérons la suite croissante de corps  $A_i$  obtenue en posant  $A_0 := k$  et  $A_i := A_{i-1}[p_i]$  pour  $1 \leq i \leq \ell$ . Comme  $C$  est un ensemble caractéristique, le polynôme  $p_i$  est le polynôme minimal qui définit l'extension de corps  $A_i/A_{i-1}$  et donc  $[A_i : A_{i-1}] = \deg(p_i, v_i)$  avec  $v_i := \text{ld}(p_i)$ . On en déduit que  $[A : k] = [A_\ell : A_0] = [A_1 : A_0] \times [A_2 : A_1] \times \dots \times [A_\ell : A_{\ell-1}]$  et le thm en découle. CQFD

D'après le thm de Stickelberger, ce degré est égal au nombre générique de points  $\bar{x} \in M$  lorsque le point  $x \in M$  et la fonction  $f$  sont fixés. Il faut prendre garde au fait que ce nombre de points  $\bar{x}$  est générique et qu'il peut chuter pour certains points  $x$  ou certaines fonctions  $f$ . Par exemple si  $C = \{x\bar{x}^2 + f\bar{x} + 1, \bar{y} - y\}$ , l'initial  $x$  et le séparant  $f^2 - 4x$  du premier polynôme de  $C$  sont non nuls en tant qu'éléments du corps des coefficients  $k$ ; dans les cas particulier  $x = 0$  ou  $f^2 - 4x = 0$ , le nombre de points  $\bar{x}$  diminue.

Nous sommes maintenant en mesure de récapituler la discussion précédente.

**Théorème 2.5** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\dim(C_{\bar{x}}(\bar{f})) = 0$ .
- (ii)  $\dim(\mathcal{S}_{\bar{f}}) = 0$ .

(iii)  $\deg(\mathcal{G}(\mathcal{S}_{\bar{f}})) < \infty$ .

Dans ce cas,  $\deg(\mathcal{G}(\mathcal{S}_{\bar{f}})) = \deg(C_{\bar{x}}(\bar{f})) = \deg(\varphi)$ .

**Corollaire 2.4** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La transformation  $\bar{x} = \varphi(x)$  est rationnelle.*
- (ii)  $\mathcal{S}_{\bar{f}} = \{\text{Id}\}$ .

DÉMONSTRATION. La transformation  $\bar{x} = \varphi(x)$  est rationnelle si et seulement si son degré en  $\bar{x}$  est égal à un. Donc  $\deg(\mathcal{G}(\mathcal{S}_{\bar{f}})) = 1$ . Par suite,  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  est le groupe réduit à l'identité. CQFD

## 2.3 Conclusion

La méthode présentée dans cette section est une méthode de force brute. Elle permet en théorie de résoudre n'importe quel problème d'équivalence où les (in)équations sont construites avec des polynômes différentiels. En pratique, cette méthode fonctionne très rarement à cause du grossissement des formules générées [DPN05]. Il suffit, pour se faire une idée, de considérer le problème d'équivalence avec la première équation de Painlevé pour les transformations dites *fiber-preserving*, c'est à dire les transformations de la forme

$$(x, y) \rightarrow (\xi(x), \eta(x, y)).$$

On sature rapidement la mémoire des ordinateurs.

D'autre part, examinons de plus près l'exemple 2.2.1.2. Le changement de variables qui envoie une équation du second ordre  $\mathcal{E}_f$  sur l'équation de Painlevé  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  est donné, en fonction de  $f$ , par les deux premières équations du système (2.12). Les conditions sur  $f$  pour que ce changement de variables existe sont données par les autres équations. En fait, on a pas besoin de connaître explicitement ces conditions d'équivalence. En effet, pour savoir si une équation donnée  $\mathcal{E}_f$  (où maintenant  $f$  est fixée) est équivalente à l'équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ , il suffit de spécialiser les deux premières équations de (2.12) en tenant compte de la valeur de  $f$  et de tester si la transformation  $\varphi$  obtenue appartient bien au pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  et envoie bien l'équation  $\mathcal{E}_f$  sur l'équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ . Dans la plupart des cas, ces tests sont plus simples à effectuer que de tester les conditions d'équivalence.

Contrairement à la méthode que nous proposons au chapitre 5, la méthode présentée ici ne permet pas de séparer le calcul du changement de variables de celui des conditions sur  $f$ . Dans la plupart des cas, c'est ce calcul (i.e. des conditions sur  $f$ ) qui est à l'origine du grossissement des formules.

Un autre inconvénient de cette méthode vient du fait qu'on est obligé de refaire *tous* les calculs si on change l'équation cible. Ainsi les calculs faits pour une équation donnée ne serviront en rien pour une autre équation. Nous verrons au chapitre suivant que la méthode d'équivalence de Cartan fournit des invariants différentiels permettant de calculer le changement de variable qui conjugue deux équations différentielles  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ . On obtient des formules plus compactes et mieux réutilisables.

# Chapitre 3

## La méthode d'équivalence de Cartan

### Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter les  $G$ -structures, les principaux résultats concernant les  $\{e\}$ -structures ainsi que la méthode d'équivalence de Cartan.

Nous verrons qu'au problème d'équivalence  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$  on associe une famille de  $G$ -structure  $P_f$  telles que les deux diffiétés  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  sont équivalentes par une transformation  $\varphi \in \Phi$  si et seulement si les deux  $G$ -structures  $P_f$  et  $P_{\bar{f}}$  sont isomorphes. On présentera une formulation algorithmique de cette étape dite de mise en équations.

Nous verrons également que la méthode de Cartan est un algorithme qui prend en entrée une famille de  $G$ -structures  $P_f$  et retourne en sortie un ensemble d'invariants dits *fondamentaux* et un certain nombre de dérivations invariantes, définis sur une variété fibrée au dessus de  $M$ . Dans la méthode de Cartan les invariants s'obtiennent par dérivation, contrairement à la méthode de Lie où on est obligé à résoudre un système EDP.

Les calculs sont faits ici à l'aide du package CARTAN [Neut].

### 3.1 Les $G$ -structures

Désignons par  $\mathcal{R}(M)$  le fibré des repères de  $M$ . Un point  $p$  de  $\mathcal{R}(M)$  dont l'origine est un point  $x \in M$  est une base de l'espace tangent  $T_x M$ . Il définit un isomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  dans  $T_x M$  que l'on notera également par  $p$ . Sur le fibré des repères  $\mathcal{R}(M)$  il existe une forme différentielle canonique  $\theta$  à valeur dans  $\mathbb{K}^n$ . Elle est définie comme suit : soit  $p \in \mathcal{R}(M)$  avec  $\pi(p) = x$  pour tout vecteur  $\dot{p} \in T_p \mathcal{R}(M)$  on pose

$$\theta|_p(\dot{p}) = p^{-1}(\pi_*(\dot{p})). \quad (3.1)$$

En fait,  $\theta(\dot{p})$  est le vecteur des coordonnées de  $\dot{p}$  dans le repère mobile  $p$ .

$$\begin{array}{ccc}
p \in \mathcal{R}(M) & & \dot{p} \in T_p \mathcal{R}(M) \\
\pi \downarrow & \nearrow \theta & \downarrow \pi'(p) \\
x \in M & \xrightarrow{p} & \dot{x} \in T_x M
\end{array}$$

FIG. 3.1 – Définition de la 1-forme canonique  $\theta$ 

### 3.1.1 Définitions et exemples

Pour présenter la méthode de Cartan nous avons besoin de définir les  $G$ -structures. Introduite par S.S. Chern [Che53, Che66] et C. Ehresmann [Ehr53], les  $G$ -structures sont étudiées de façon approfondie dans [Ste64].

**Définition 3.1 ( $G$ -structure)** Soit  $G$  un sous-groupe de  $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ . Une  $G$ -structure  $P$  fibrée sur une variété  $M$  est une sous-variété de  $\mathcal{R}(M)$  avec la propriété que pour tout repère  $p \in P$  et pour tout  $g \in \mathrm{GL}(n)$ , le repère  $p.g$  appartient à  $P$  si et seulement si  $g \in G$ .

Tout difféomorphisme  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  se prolonge de manière unique en un difféomorphisme  $\varphi_*$  de  $\mathcal{R}(M)$  dans  $\mathcal{R}(\bar{M})$  (voir figure (3.2) )

$$\begin{array}{ccc}
p \in \mathcal{R}(M) & \xrightarrow{\varphi_*} & \bar{p} \in \mathcal{R}(\bar{M}) \\
\pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\
x \in M & \xrightarrow{\varphi} & \bar{x} \in \bar{M}
\end{array}$$

FIG. 3.2 – Correspondance entre  $\varphi$  et  $\varphi_*$ 

**Définition 3.2** Soient  $P$  et  $\bar{P}$  deux  $G$ -structures définies sur  $M$  et  $\bar{M}$  respectivement. Un difféomorphisme  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  est dit isomorphisme de  $P$  dans  $\bar{P}$  si  $\varphi_*(P) = \bar{P}$ . Dans ce cas, les deux  $G$ -structures sont dites isomorphes. Si  $P = \bar{P}$  alors l'isomorphisme  $\varphi$  est dit automorphisme de  $P$ .

On notera le pseudo-groupe de Lie des automorphismes d'une  $G$ -structure  $P$  par  $\mathrm{Aut}^{\mathrm{loc}}(P)$ . C'est un pseudo-groupe de Lie d'après la proposition 3.1 ci-dessous.

**Exemple 3.1** Si  $P$  est une  $G$ -structure sur  $M$  et  $\pi$  est la projection de  $P$  sur  $M$ , alors  $\pi^{-1}(U)$  est une  $G$ -structure sur  $U$  pour tout ouvert  $U$  de  $M$ .

**Exemple 3.2** Le fibré des repères sur  $M$  est  $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ -structure sur  $M$ . Les automorphismes sont les difféomorphismes de  $M$  dans  $M$ . Le fibré des repères orthonormés d'une variété riemannienne  $M$  est une  $\mathrm{O}(m, \mathbb{R})$ -structure. Les automorphismes de la  $G$ -structure sont les isométries de  $M$ .

**Exemple 3.3** A toute distribution  $\Delta$  sur  $M$  (en particulier, à toute diffiété) lui correspond une  $G$ -structure  $P \subset \mathcal{R}(M)$ . Un élément de  $P$  est une base de  $T_x M$  formée d'une base quelconque de  $\Delta_x$  complétée par une base quelconque d'un supplémentaire de  $\Delta_x$  dans  $T_x M$ . Les automorphismes de cette  $G$ -structure correspondent donc aux difféomorphismes  $\varphi : M \rightarrow M$  tels que  $\varphi_*(\Delta) \subset \Delta$ .

**Exemple 3.4** D'après le théorème fondamental de Cartan, thm. 1.6 page 30, tout pseudo-groupe de Lie transitif sur une variété  $M$  peut être vu comme le pseudo-groupe de Lie des automorphismes d'une certaine  $G$ -structure définie sur une variété fibrée au dessus de  $M$  (voir aussi [Kob72]). Les variables auxiliaires dans le théorème de Cartan, sont les coordonnées locales du groupe structural. Dans la suite, tous les pseudo-groupes de Lie considérés sont supposés transitifs.

Soit maintenant  $P$  une  $G$ -structure sur  $M$ . Rappelons que sur le fibré des repères  $\mathcal{R}(M)$  vit une forme différentielle  $\theta$  définie par (3.1). La restriction de cette forme sur la sous-variété  $P$  est appelée *forme canonique* associée à la  $G$ -structure  $P$ . Par abus de notation, on continuera à noter cette forme par  $\theta$  et on écrira  $P = (M, G, \theta)$ .

**Proposition 3.1** Étant données deux  $G$ -structures  $P = (M, G, \theta)$  et  $\bar{P} = (\bar{M}, G, \bar{\theta})$ . Le difféomorphisme  $\varphi : P \rightarrow \bar{P}$  est un isomorphisme de  $G$ -structures si et seulement s'il vérifie  $\varphi^*(\bar{\theta}) = \theta$ .

DÉMONSTRATION. La preuve découle du fait que la commutativité des deux diagrammes (3.3) et (3.4) est équivalentes.

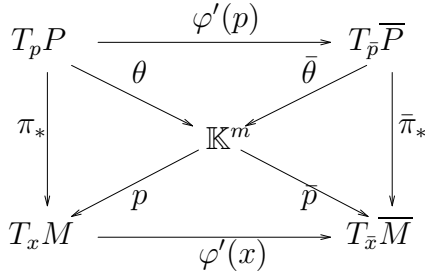


FIG. 3.3 –  $\varphi^*(\bar{\theta}) = \theta$

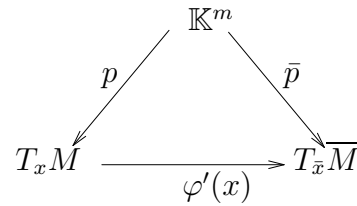


FIG. 3.4 – Correspondance entre  $p$  et  $\bar{p}$

CQFD

Notons la restriction de la  $G$ -structure  $P$  sur un ouvert  $U$  de  $M$  par  $P|_U$ .

**Définition 3.3** Soient  $P$  et  $\bar{P}$  deux  $G$ -structures définies sur  $M$  et  $\bar{M}$ . Soient  $x \in M$  et  $\bar{x} \in \bar{M}$ . Les deux  $G$ -structures  $P$  et  $\bar{P}$  sont dites *localement équivalentes au point*  $(x, \bar{x})$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et un voisinage  $\bar{U}$  de  $\bar{x}$  telle que les deux  $G$ -structures  $\bar{P}|_{\bar{U}}$  et  $P|_U$  soient isomorphes.

Voyons à quoi ressemble, en coordonnées locales, la forme canonique  $\theta$  d'une  $G$ -structure  $P$  sur  $M$ . Soient  $s$  une section locale de  $P$  et  $p \in P$  un repère d'origine  $x$ . Il existe alors  $g = g(x) \in G$  telle que

$$s(x) = p.g. \quad (3.2)$$

En d'autres termes,  $p$  est de coordonnées  $(x, g)$  dans le repère  $s(x)$ . Considérons  $\omega$  le corepères dual à la section  $s$ . Le vecteur des coordonnées du vecteur  $\dot{x} \in T_x M$  dans le



repère  $s(x)$  est égal à  $\omega_x(\dot{x})$ . D'après (3.2), ce même vecteur a pour vecteur coordonnées dans le repère  $p$  le vecteur produit  $g.\omega_x(\dot{x})$ . Ce qui nous donne

$$\theta_{(x,g)} = g.\omega_x,$$

qui est l'expression en coordonnées locales de la forme canonique  $\theta$ .

### 3.1.2 Les $\{e\}$ -structures

Les démonstration des résultats rappelés ici se trouvent dans [Olv95]. Lorsque le groupe structural d'une  $G$ -structure  $P$  est trivial (réduit à l'identité) on dira que  $P$  est une  $\{e\}$ -structure. Dans ce cas, les équations de structure prennent la forme simple

$$d\theta^i = T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k.$$

Dans ce cas, le pseudo-groupe de Lie  $\text{Aut}^{\text{loc}}(P)$  des automorphismes de  $P$  est de dimension finie. En effet, une transformation  $\varphi \in \text{Aut}^{\text{loc}}(P)$  si et seulement si elle vérifie

$$\begin{cases} \varphi^* \theta - \theta &= 0, \\ \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m &\neq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Puisque ce système est complètement intégrable, la transformation  $\varphi$  dépend d'un nombre fini de constantes arbitraires. Réciproquement, on a la proposition suivante

**Proposition 3.2** *Soit  $P$  une  $G$ -structure sur  $M$ . Si le pseudo-groupe de Lie  $\text{Aut}^{\text{loc}}(P)$  est de dimension finie alors  $P$  se prolonge en une  $\{e\}$ -structure.*

Pour énoncer la proposition (3.3), qui nous sera utile dans le reste de la thèse, nous avons besoin de la définition suivante

**Définition 3.4** *Soient  $I_1, \dots, I_k$  des fonctions analytiques de la variété  $M$  dans  $\mathbb{K}$  et ayant un domaine de définition commun. On dira qu'elles sont fonctionnellement (resp. algébriquement) dépendantes si, pour tout  $x_0 \in M$  il existe un voisinage  $U$  et une fonction analytique (resp. algébrique)  $H(z_1, \dots, z_k)$ , non identiquement nulle, telle que  $H(f_1(x), \dots, f_k(x)) = 0$  pour tout  $x \in U$ . On dira qu'elles sont fonctionnellement (resp. algébriquement) indépendantes dans le cas contraire.*

On peut vérifier que les fonctions  $I_1, \dots, I_k$  sont fonctionnellement indépendantes si et seulement si leurs différentielles  $dI_1, \dots, dI_k$  sont  $C^\omega(M)$ -linéairement indépendantes où  $C^\omega(M)$  est la  $\mathbb{K}$ -algèbre des fonctions analytiques de  $M$  dans  $\mathbb{K}$ .

Ceci étant dit, soit  $P$  une  $\{e\}$ -structure sur  $M$  avec les équations de structure

$$d\theta^i = T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k.$$

Notons par  $\mathcal{A}$  le corps différentiel engendré par les fonctions  $T_{jk}^i$  et les dérivations  $X_1, \dots, X_m$  duales aux formes  $\theta^1, \dots, \theta^m$  avec  $m = \dim(M)$ .

**Définition 3.5** *Le nombre maximal  $\rho$  de fonctions de  $\mathcal{A}$  fonctionnellement indépendantes est appelé rang de la  $\{e\}$ -structure  $P$ .*

On montre que

$$0 \leq \rho \leq m.$$

En particulier  $\rho = 0$  lorsque tous les coefficients  $T_{jk}^i$  sont constants.

**Proposition 3.3 (Olver)** *Soit  $P$  une  $\{e\}$ -structure sur  $M$  de rang  $\rho$ . La dimension du pseudo-groupe de Lie  $\text{Aut}^{\text{loc}}(P)$  des automorphismes de  $P$  est égale à  $m - \rho$ .*

## 3.2 $G$ -structures et problèmes d'équivalence

Etant donné un problème d'équivalence défini par la famille de diffiétés  $\mathcal{E}_f = (M, \Delta_f)$  et le pseudo-groupe de Lie  $\Phi \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(M)$  dont les équations de définition sont supposées du premier ordre. En vue d'appliquer la méthode d'équivalence, Élie Cartan formule le problème d'équivalence  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$  en un problème d'équivalence de  $G$ -structures  $P_f$  sur  $M$ . Cette étape de préparation, souvent négligée dans la littérature, repose sur la proposition suivante (intersection de deux pseudo-groupes de Lie)

**Proposition 3.4** *Soient  $P' = (M, G', \theta')$  et  $P'' = (M, G'', \theta'')$  deux  $G$ -structures. Il existe une  $G$ -structure  $P = (M, G, \theta)$  telle que*

$$\text{Aut}^{\text{loc}}(P) = \text{Aut}^{\text{loc}}(P') \cap \text{Aut}^{\text{loc}}(P'').$$

DÉMONSTRATION. En coordonnées locales, les formes canoniques de  $P'$  et  $P''$  s'écrivent

$$\theta' = A\omega', \quad \theta'' = B\omega'',$$

où  $A \in G'$ ,  $B \in G''$  et  $\omega'$ ,  $\omega''$  sont deux corepères de  $M$ . Désignons par  $Q \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$  la matrice de changement de corepère  $\omega' = Q\omega''$ . Dans ce cas, on vérifie que  $\theta' = AQB^{-1}\theta''$ . Ce qui permet de déduire que la matrice inversible  $J = AQB^{-1}$  est invariante par les transformations  $\varphi$  de  $\text{Aut}^{\text{loc}}(P') \cap \text{Aut}^{\text{loc}}(P'')$ . La normalisation (voir section 3.3.3) des entrées de cette matrice  $J$  donne la  $G$ -structure  $P$ . CQFD

A présent, la mise en équations du problème d'équivalence  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$  comporte les étapes suivantes

---

### procédure de mise en équations d'un problème d'équivalence

---

- 1- construire la famille de  $G'$ -structures  $P'_f = (M, G', \theta'_f)$  qui correspond à la famille de distributions  $\Delta_f$ ,
- 2- construire la  $G''$ -structure  $P''_\Phi = (M, G'', \theta'')$  dont le pseudo-groupe de Lie des automorphismes est un prolongement holoédrique de  $\Phi$ ,
- 3- construire la famille de  $G$ -structure  $P_f$  telle que

$$\text{Aut}^{\text{loc}}(P_f) = \text{Aut}^{\text{loc}}(P'_f) \cap \text{Aut}^{\text{loc}}(P''_\Phi).$$

Les diffiétés  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  sont équivalentes par une transformation  $\varphi \in \Phi$  si et seulement si les deux  $G$ -structure  $P_f$  et  $P_{\bar{f}}$  sont isomorphes.

---

Avant d'aller plus loin dans la présentation de la méthode de Cartan, illustrons ce procédé sur un exemple

**Exemple 3.5** *Considérons le problème d'équivalence donné par les équations autonomes du second ordre ( $\dot{x} = \frac{d}{dt}x(t)$ )*

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \quad t, x \in \mathbb{R}$$

*et le pseudo-groupe de Lie défini par les équations*

$$\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \neq 0. \quad (3.4)$$

*Une transformation quelconque prise dans ce pseudo-groupe de Lie est de la forme  $\bar{t} = t + \alpha(x)$ ,  $\bar{x} = \beta(x)$ . Elle envoie une solution périodique d'une équation autonome sur une autre solution périodique.*

*L'équation différentielle  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$  définit une diffiété  $\mathcal{E}_f = (M, \Delta_f)$  où  $M$  est la variété de coordonnées locales  $(t, x, p = \dot{x})$  et  $\Delta_f$  est la distribution engendrée par les deux 1-formes*

$$dx - p dt, \quad dp - f(x, p) dt.$$

*Commençons par déterminer la famille de G-structures  $P'_f$  qui correspond à la famille de distributions  $\Delta_f$ . Deux diffiétés  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  sont équivalentes par une transformation  $\varphi : M \rightarrow M$  si et seulement si (en omettant le pull-back)*

$$\begin{pmatrix} d\bar{x} - \bar{p} d\bar{t} \\ d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x}, \bar{p}) d\bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx - p dt \\ dp - f(x, p) dt \end{pmatrix}.$$

*Ce système s'écrit (en complétant les deux formes de contact pour obtenir un corepère de  $M$ )*

$$\begin{pmatrix} d\bar{t} \\ d\bar{x} - \bar{p} d\bar{t} \\ d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x}, \bar{p}) d\bar{t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_6 & a_7 \end{pmatrix}}_{A(a) \in G'} \underbrace{\begin{pmatrix} dt \\ dx - p dt \\ dp - f(x, p) dt \end{pmatrix}}_{\omega'_f},$$

*pour certaines fonctions  $a_1, \dots, a_7$  définies sur  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . La 1-forme  $\theta'_f := A(a)\omega'_f$  définit la  $G'$ -structure  $P'_f = (M, G', \theta'_f)$ .*

*Construisons maintenant la G-structure  $P''_\Phi$  telle que  $\text{Aut}^{\text{loc}}(P''_\Phi) = \Phi$ . Les équations de définition (3.4) sont équivalentes à*

$$\begin{pmatrix} d\bar{t} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix}$$

*d'où*

$$\begin{pmatrix} d\bar{t} \\ d\bar{x} \\ d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x}, \bar{p}) d\bar{t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}}_{B(b) \in G''} \underbrace{\begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dp - f(x, p) dt \end{pmatrix}}_{\omega''}.$$

*Le pseudo-groupe de Lie considéré  $\Phi$  est isomorphe au pseudo-groupe de Lie des automorphismes de la  $G''$ -structure  $P''_\Phi = (M, G'', \theta'')$  définie par la forme canonique*

$\theta'' = B(b)\omega''$  (Remarquer que les deux formes  $\theta''_1 = dt + b_1 dx$  et  $\theta''_2 = b_2 dx$  sont les mêmes formes invariantes  $\omega^1$  et  $\omega^2$  données par (1.18) page 32).

Soit la matrice de passage

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

telle que  $\omega'_f = Q\omega''$ . Nous avons maintenant toutes les éléments pour calculer la famille de  $G$ -structures  $P_f$ . En effet, d'après la démonstration de la proposition 3.4, la matrice inversible  $J = AQB^{-1}$

$$J = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 p - \frac{a_3 b_3}{b_5} & -\frac{(a_1 - a_2 p) b_1}{b_2} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3 (-b_4 + b_1 b_3)}{b_2 b_5} & \frac{a_3}{b_5} \\ -a_4 p - \frac{a_5 b_3}{b_5} & \frac{a_4 p b_1}{b_2} + \frac{a_4}{b_2} + \frac{a_5 (-b_4 + b_1 b_3)}{b_2 b_5} & \frac{a_5}{b_5} \\ -a_6 p - \frac{a_7 b_3}{b_5} & \frac{b_1 a_6 p}{b_2} + \frac{a_6}{b_2} + \frac{a_7 (-b_4 + b_1 b_3)}{b_2 b_5} & \frac{a_7}{b_5} \end{pmatrix}$$

est invariante pour le problème d'équivalence. On peut alors normaliser ses entrées à des valeurs constantes convenables en posant par exemple

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui permet d'obtenir

$$a_1 = a_2 p + 1, \quad a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_4 = p^{-1}.$$

La substitution de ces valeurs dans  $\theta'_f$  donne le vecteur de 1-formes

$$\theta_f = \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 p + 1 & a_2 & 0 \\ 0 & p^{-1} & 0 \\ 0 & a_6 & a_7 \end{pmatrix}}_{A'} \omega'_f.$$

Montrons que  $\theta_f$  est la forme canonique d'une certaine  $G$ -structure  $P_f$  (remarquer que la matrice  $A'$  ne peut pas être une matrice d'un groupe structural : elle a une entrée égale à  $p^{-1}$ ). Par contre, on peut écrire

$$\theta_f = A' (A'|_{\text{Id}})^{-1} A'|_{\text{Id}} \omega'_f,$$

où  $A'|_{\text{Id}}$  est la matrice obtenue à partir de  $A'$  en se mettant sur l'identité du groupe  $G'$ . Posons  $\omega_f := A'|_{\text{Id}} \omega'_f$  et  $g := A' (A'|_{\text{Id}})^{-1}$ . Le calcul donne (après renommage des paramètres)

$$\omega_f = \begin{pmatrix} dt \\ \frac{dx}{p} \\ dp - f(x, p) dt \end{pmatrix}$$

et

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 + a_1 & 0 \\ -a_2 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que les matrices  $g$  forment un groupe  $G$  et  $\omega_f$  est un corepère de  $M$ . Le vecteur de 1-formes  $\theta_f$  est la forme canonique d'une  $G$ -structure  $P_f = (M, G, \theta_f)$ .

On vient de démontrer que deux équations différentielles  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  sont équivalentes par une transformation  $\varphi$  vérifiant (3.4) si et seulement si les deux  $G$ -structures  $P_f$  et  $P_{\bar{f}}$  sont isomorphes.

**Remarque 3.1** La plupart des pseudo-groupes de Lie traités dans la littérature ont des équations de définition simples, ce qui permet de raccourcir le calcul de la mise en équations. C'est le cas par exemple des transformations ponctuelles

$$(t, x) \rightarrow (\tau(t, x), \xi(t, x)).$$

Ces transformations du  $J^0(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ , ont la propriété d'envoyer la forme de contact  $d\bar{x} - \bar{p}d\bar{t}$  sur la forme de contact  $dx - pdt$  à un facteur près. Il suffit pour obtenir la  $G$ -structure  $P_f$ , de poser  $a_3 = 0$  et  $a_5 = 0$  dans la matrice  $A$  de l'exemple précédent. Pour les transformations fiber-preserving

$$(t, x) \rightarrow (\tau(t), \xi(t, x))$$

il faut exprimer également que  $\bar{t}$  ne dépend pas de  $x$  c'est à dire  $a_2 = 0$ .

### 3.3 La méthode d'équivalence de Cartan

Elle prend en entrée une famille de  $G$ -structures  $P_f = (M, G, \theta_f)$  et retourne en sortie un ensemble d'invariants dit *fondamentaux* et un certain nombre de dérivations invariantes (ou formes invariantes par dualité) définis sur une variété fibrée au dessus de  $M$ .

Nous avons vu, proposition 3.1, que le problème d'équivalence de  $G$ -structures est un problème de calcul de contraintes d'intégrabilité d'un certain système de Pfaff linéaire. La méthode de Cartan, n'est alors qu'une application de l'algorithme de calcul de contraintes d'intégrabilité d'un système de Pfaff linéaire, présenté dans le premier chapitre.

Dans les paragraphes suivants nous allons présenter les cinq étapes de la méthode de Cartan. Cette présentation est fortement inspirée de [Neut]. L'algorithme de la méthode d'équivalence est illustré dans le schéma 3.5.

#### 3.3.1 Calcul des équations de structure

Étant donnée une  $G$ -structure  $P_f = (M, G, \theta_f)$ . On sait que la  $G$ -structure  $P_{\bar{f}} = (M, G, \theta_{\bar{f}})$  est isomorphe à  $P_f$  si et seulement s'il existe une transformation  $\varphi : \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathcal{R}(M)$  solution du système de Pfaff linéaire

$$\begin{cases} \theta_{\bar{f}} - \theta_f &= 0, \\ d\theta_{\bar{f}} - d\theta_f &= 0, \\ \theta_f^1 \wedge \cdots \wedge \theta_f^m &\neq 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

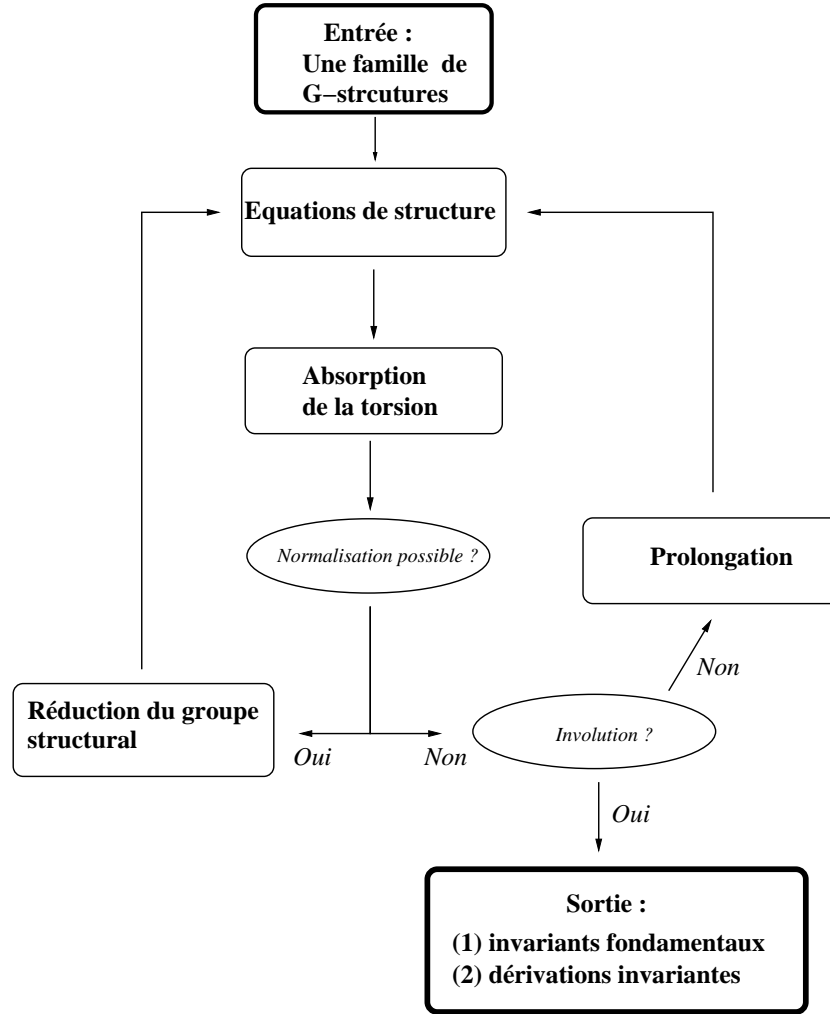


FIG. 3.5 – Schéma d'algorithme de la méthode d'équivalence.

En coordonnées locales la forme canonique  $\theta_f$  s'écrit  $\theta_f = g\omega_f$  avec  $g$  une matrice du groupe structural  $G$  et  $\omega_f$  un champ de corepères de  $P_f$ . Pour alléger les notations posons  $\theta = \theta_f$  et  $\omega = \omega_f$ .

Le calcul de la différentielle extérieure nous donne

$$d\theta = dgg^{-1} \wedge \theta + g d\omega,$$

ou ce qui est équivalent

$$d\theta^i = (dgg^{-1})_j^i \wedge \theta^j + (gd\omega)^i. \quad (3.6)$$

Dans ces équations la matrice  $dgg^{-1}$  n'est autre que la matrice de Maurer–Cartan du groupe  $G$ . Choisissons parmi les entrées de cette matrice  $r = \dim(G)$  formes linéairement indépendantes  $\{\pi^\rho\}$ . Dans ce cas, on a (les coefficients  $A_{j\rho}^i$  sont constants)

$$(dgg^{-1})_j^i = A_{j\rho}^i \pi^\rho$$

D'autre part, les 2-formes semi-basiques  $(gd\omega)^i$ ,  $1 \leq i \leq m$  sont combinaisons

linéaires des 2-formes  $\{\theta^j \wedge \theta^k\}$ . Par conséquent, il existe des fonctions analytiques  $T_{jk}^i$  définies sur la variété  $P_f$  tel que  $(gd\omega)^i = T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k$ .

Les équations (3.6) s'écrivent alors sous la forme

$$d\theta^i = A_{j\rho}^i \pi^\rho \wedge \theta^j + T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k,$$

où les coefficients de torsion  $T_{jk}^i$  dépendent de notre choix des formes  $\{\pi^\rho\}$ .

Par un calcul analogue sur la  $G$ -structure  $P_{\bar{f}}$ , on trouve les équations de structure

$$d\bar{\theta}^i = A_{j\rho}^i \bar{\pi}^\rho \wedge \bar{\theta}^j + \bar{T}_{jk}^i \bar{\theta}^j \wedge \bar{\theta}^k$$

où on a posé  $\theta_{\bar{f}} = \bar{\theta}$ , pour alléger les notations.

**Exemple 3.6 (Suite)** *Pour le problème d'équivalence des équations autonomes du second ordre pour les transformations de la forme  $(t, x) \rightarrow (t + \alpha(x), \beta(x))$ , le calcul des équations de structure donne*

$$d \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi^1 & 0 \\ 0 & \pi^1 & 0 \\ \pi^2 & -\pi^2 & \pi^3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{12}^1 \theta^1 \wedge \theta^2 + T_{23}^1 \theta^2 \wedge \theta^3 \\ T_{12}^2 \theta^1 \wedge \theta^2 + T_{23}^2 \theta^2 \wedge \theta^3 \\ T_{12}^3 \theta^1 \wedge \theta^2 + T_{13}^3 \theta^1 \wedge \theta^3 + T_{23}^3 \theta^2 \wedge \theta^3 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

avec

$$\pi^1 = \frac{1}{1+a_1} da_1, \quad \pi^2 = \frac{a_2}{a_3} da_3 - da_2, \quad \pi^3 = \frac{1}{a_3} da_3.$$

La matrice des formes  $\{\pi^\rho\}$  est une matrice à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe structural  $G$ .

### 3.3.2 Absorption de la torsion

Il s'agit du même procédé présenté dans l'algorithme de calcul des contraintes d'intégrabilité appliqué, ici, aux équations de structure

$$d\theta^i = A_{j\rho}^i \pi^\rho \wedge \theta^j + T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k$$

et par supposition aux équations de structure de toute  $G$ -structure  $P_{\bar{f}}$  isomorphe à  $P_f$ . Dans ce cas, les contraintes d'intégrabilité du système de Pfaff  $\bar{\theta} - \theta = 0$ ,  $d\bar{\theta} - d\theta = 0$  et  $\theta \neq 0$  sont de la forme

$$\bar{T}_{jk}^i - T_{jk}^i = 0.$$

Ce qui montre que les  $T_{jk}^i$  qui restent non nuls après l'absorption de la torsion sont constants sur l'orbite de la  $G$ -structure  $P_f$ . En d'autre terme, ils sont invariants pour le problème d'équivalence.

**Exemple 3.7 (Suite)** *Reprenons l'exemple d'équivalence des équations autonome du second ordre où les équations de structure sont données par (3.7).*

*Effectuons le changement de formes  $\pi \rightarrow \pi + \Lambda\theta$  dans ces équations. Nous pouvons choisir les paramètres  $\lambda_j^\rho$  de sorte que tous les coefficients de torsion  $T_{jk}^i$ , sauf  $T_{12}^2$  et  $T_{23}^2$ , soient nuls.*

Dans ce cas, les équations de structure deviennent

$$d \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi^1 & 0 \\ 0 & \pi^1 & 0 \\ \pi^2 & -\pi^2 & \pi^3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T_{12}^2 \theta^1 \wedge \theta^2 + T_{23}^2 \theta^2 \wedge \theta^3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

faisant apparaître les invariants

$$T_{12}^2 = -\frac{a_2 + a_3 f}{p(1 + a_1)a_3}, \quad T_{23}^2 = \frac{1}{p(1 + a_1)a_3},$$

avec bien évidemment  $(1 + a_1)a_3 \neq 0$  conséquence de l'inversibilité de la matrice du groupe structural.

Les paramètres  $\lambda_j^\rho$  qui restent arbitraires sont donnés par la matrice

$$\Lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2^1 & 0 \\ \lambda_1^2 & -\lambda_1^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_3^2 & -\lambda_3^2 & \lambda_3^3 \end{pmatrix}.$$

Le degré d'indétermination est égal au nombre des  $\lambda_j^\rho$  dans  $\Lambda^{(2)}$  c'est à dire 4.

### 3.3.3 Normalisation

Nous venons de voir que les coefficients de torsion essentiels sont invariants. Si parmi ces invariants, il existe quelques-uns qui dépendent des paramètres du groupe structural, alors il est possible de réduire le groupe structural en fixant ces invariants à des valeurs convenables, souvent zéro ou un. Ce qui conduit à une réduction du groupe structural  $G$  en un groupe de Lie  $G_1$  de dimension inférieure. La difficulté est de démontrer qu'on obtient une  $G_1$ -structure.

Notons par  $V$  l'espace  $\mathbb{K}^n$  et par  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie du groupe  $G$ . Soient  $\{e_i\}$  une base de  $V$ ,  $\{e^j\}$  une base de  $V^*$  et  $\{A_\rho\}_{1 \leq \rho \leq r}$  une base de  $\mathfrak{g}$ . Introduisons l'opérateur linéaire  $\mathbf{L}$  d'anti-symétrisation

$$\mathfrak{g} \otimes V^* \xrightarrow{\mathbf{L}} V \otimes \wedge^2 V^*$$

défini par

$$\mathbf{L}(\lambda_k^\rho A_\rho \otimes e^k) = -(A_{j\rho}^i \lambda_k^\rho - A_{k\rho}^i \lambda_j^\rho) e_i \otimes e^j \wedge e^k.$$

On lui associe la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{g}^{(1)} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes V^* \xrightarrow{\mathbf{L}} V \otimes \wedge^2 V^* \rightarrow W \rightarrow 0$$

où  $\mathfrak{g}^{(1)} = \ker \mathbf{L}$  est la première prolongation de  $\mathfrak{g}$  et

$$W = \text{coker } \mathbf{L} = \frac{V \otimes \wedge^2 V^*}{\mathbf{L}(\mathfrak{g} \otimes V^*)}.$$

L'espace  $W$  est souvent noté  $H^{0,2}(\mathfrak{g})$  dans la théorie cohomologique de Spencer.



Voyons de plus près les invariants fournis par l'absorption de la torsion. Soit l'application

$$C_f : P_f \rightarrow V \otimes \wedge^2 V^*$$

définie en tout point  $p \in P_f$  par

$$C_f(p) = T_{jk}^i(p) e_i \otimes e^j \wedge e^k.$$

L'absorption de la torsion consiste alors à composer cette application avec la projection canonique

$$V \otimes \wedge^2 V^* \rightarrow W.$$

Le résultat est une application  $c_f : P_f \rightarrow W$ , appelée *torsion intrinsèque*. On montre [Gar89, Ste64] qu'elle est équivariante. L'action naturelle du groupe structural sur l'espace  $W$  est donnée par

$$R_g (T_{jk}^i e_i \otimes e^j \wedge e^k) = \sigma_j^\rho \sigma_k^q T_{pq}^m s_m^i e_i \otimes e^j \wedge e^k$$

avec  $g = S(a) = (s_j^i)$  et  $(\sigma_j^i)$  la matrice inverse de  $S(a)$ .

$$\begin{array}{ccc} p \in P_f & \xrightarrow{c_f} & c_f(p) \in W \\ \downarrow g & & \downarrow R_g \\ pg \in P_f & \xrightarrow{c_f} & R_g c_f(p) \in W \end{array}$$

FIG. 3.6 – La torsion intrinsèque est équivariante

Par construction on a la proposition suivante

**Proposition 3.5** *Pour un choix de base de  $W$  donné, les composantes d'un tenseur pris dans l'image  $c_f(P_f)$  sont les invariants calculés par la méthode de Cartan.*

Etant donné un vecteur  $w_0$  dans l'image  $c_f(P_f)$ . On définit alors la sous-variété de  $P_{f1} \subset P_f$  et le groupe de Lie  $G_1 \subset G$  par

$$\begin{cases} P_{f1} &:= \{p \in P_f \mid c_f(p) = w_0\} \\ G_1 &:= \{g \in G \mid \forall p \in P_f, c_f(p \cdot g) = c_f(p)\} \end{cases} \quad (3.8)$$

La *normalisation* (3.8) est dite une normalisation du 1er ordre de type constant lorsque le groupe  $G$  opère transitivement sur l'espace vectoriel  $W$ .

**Proposition 3.6** *Si la normalisation (3.8) est "du 1er ordre de type constant", alors  $P_{f1}$  est une  $G_1$ -structure de base  $M$ . De plus, soit  $i : P_{f1} \rightarrow P_f$ , le plongement canonique de  $P_{f1}$  dans  $P_f$ . Si  $\theta_f$  est la 1-forme canonique associée à  $P_f$ , alors la 1-forme  $i^* \theta_f$  est la forme canonique associée à la  $G_1$ -structure  $P_{f1}$ .*

**Proposition 3.7** *Deux  $G$ -structures  $P_f$  et  $P_{\bar{f}}$  sont isomorphes si et seulement si les  $G_1$ -structures  $P_{f1}$  et  $P_{\bar{f}1}$  le sont.*

Après chaque normalisation, l'étape d'absorption peut à nouveau permettre de trouver des invariants. On reste ainsi dans une boucle d'absorptions et de normalisations tant que l'on trouve des invariants qui dépendent des paramètres du groupe  $G$ .

**Exemple 3.8 (Suite)** *Continuons l'étude du problème d'équivalence des équations autonomes du second ordre. L'étape de l'absorption de la torsion nous a fournit des équations de structure faisant apparaître les invariants*

$$T_{12}^2 = -\frac{a_2 + a_3 f}{p(1 + a_1)a_3}, \quad T_{23}^2 = \frac{1}{p(1 + a_1)a_3}.$$

*Posons*

$$T_{12}^2 = 0, \quad T_{23}^2 = 1,$$

*ce qui permet de normaliser les paramètres  $a_2$  et  $a_3$  et de réduire ainsi le groupe structural  $G$  en un groupe  $G_1 \subset G$ . Il faut ensuite recalculer les équations de structure de la nouvelle  $G_1$ -structure. On obtient, après avoir absorbé la torsion*

$$d \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\pi^1 & 0 \\ 0 & -\pi^1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta^2 \wedge \theta^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*On constate qu'aucune normalisation n'est possible.*

### 3.3.4 Le test de Cartan

Supposons qu'après une ou plusieurs boucles d'absorptions de la torsion et de normalisations, aucun invariant ne dépend des paramètres de groupe structural. Dans ce cas, on fait passer le système de Pfaff (rappelons qu'on a posé  $\theta = \theta_f$  et  $\bar{\theta} = \theta_{\bar{f}}$  pour alléger les notations)

$$\begin{cases} \bar{\theta} - \theta & = 0, \\ d\bar{\theta} - d\theta & = 0, \\ \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m & \neq 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

le test de Cartan décrit page 24. Si le système (3.9) est en involution alors on a

**Proposition 3.8** *Soit  $\mathcal{A}_f$  (resp.  $\mathcal{A}_{\bar{f}}$ ) le corps différentiel engendré par les invariants  $T_{jk}^i$  (resp.  $\bar{T}_{jk}^i$ ) et les dérivations duales aux formes  $\{\theta^i\}_{1 \leq i \leq m}$  (resp.  $\{\bar{\theta}^i\}_{1 \leq i \leq m}$ ) du système (3.9), en involution. Alors les  $G$ -structures  $P_f$  et  $P_{\bar{f}}$  sont isomorphes si et seulement si  $\mathcal{A}_f$  et  $\mathcal{A}_{\bar{f}}$  le sont.*

Soit  $\{X_i\}_{1 \leq i \leq m}$  les dérivations duales aux formes  $\{\theta^i\}_{1 \leq i \leq m}$ . La proposition précédente signifie que dans le cas où le système (3.9) est en involution, l'ensemble  $\{T_{jk}^i, X_i\}$  est un système complet d'invariants. Le cas le plus simple est lorsque tous les invariants fondamentaux  $T_{jk}^i$  sont constants [DN05, DN06]. La  $G$ -structure  $P_{\bar{f}}$  est isomorphe à  $P_f$  si et seulement si

$$\bar{T}_{jk}^i = T_{jk}^i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j < k \leq m.$$

Maintenant, si le système (3.9) n'est pas en involution alors  $\mathcal{A}_f \sim \mathcal{A}_{\bar{f}}$  ne suffit pas pour affirmer que les  $G$ -structures  $P_f$  et  $P_{\bar{f}}$  sont isomorphes. Il faut prolonger le système de Pfaff (3.9).

**Exemple 3.9 (Suite)** *Appliquons le test d'involution de Cartan à notre problème d'équivalence des équations du second ordre*

$$d \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\pi^1 & 0 \\ 0 & -\pi^1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta^2 \wedge \theta^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul des caractères de Cartan donne  $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 0$ . Le degré d'indétermination est nul ce qui montre que le système n'est pas en involution.

### 3.3.5 Prolongation

On fait appel à cette procédure si les conditions suivantes sont réunies. Premièrement, on suppose qu'après une ou plusieurs boucles d'absorptions de la torsion et de normalisations aucun coefficient de torsion ne dépend de paramètres du groupe. Deuxièmement, ce dernier n'est pas complètement réduit à l'identité. Et enfin, on suppose que le système de Pfaff linéaire

$$\begin{cases} \bar{\theta} - \theta & = 0, \\ d\bar{\theta} - d\theta & = 0, \\ \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m & \neq 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

n'est pas en involution.

Cette procédure, présentée dans le chapitre 1, consiste dans le cas de la méthode de Cartan à rajouter au système de Pfaff précédant les équations des éléments intégraux ordinaires

$$\bar{\pi} = \pi + \Lambda^{(2)}\theta$$

après les avoir écrit sous la forme symétrique

$$\bar{\pi} + \bar{\Lambda}^{(2)}\bar{\theta} = \pi + \Lambda^{(2)}\theta.$$

La matrice  $\Lambda^{(2)} = (\lambda_j^\rho)$  est la matrice des  $\lambda_j^\rho$  qui sont restés arbitraires après la dernière absorption de la torsion.

On obtient une  $G^{(1)}$ -structure, notée  $P_f^{(1)}$ , définie sur la variété  $M^{(1)}$  égale au produit des variétés  $M \times G$ . Le nouveau groupe structural est le sous-groupe de  $GL(m+r, \mathbb{R})$  formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_m & 0 \\ \Lambda^{(2)} & \text{Id}_r \end{pmatrix}.$$

On montre que le nouveau groupe  $G^{(1)}$  est toujours abélien (même si ça n'a pas d'intérêt pratique) et que l'algèbre de Lie associée est  $\mathfrak{g}^{(1)} = \ker \mathbf{L}$ . La forme canonique de la  $G^{(1)}$ -structure est donc donnée par

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_m & 0 \\ \Lambda^{(2)} & \text{Id}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Par un raisonnement similaire on prolonge la  $G$ -structure  $P_f$  en une  $G^{(1)}$ -structure  $P_{\bar{f}}^{(1)}$  et puisque la prolongation d'un système différentiel extérieur est un système de Pfaff qui a les mêmes variétés intégrales, on a

**Proposition 3.9** *Les  $G$ -structures  $P_f$  et  $P_{\bar{f}}$  sont équivalentes si et seulement si les  $G^{(1)}$ -structures  $P_f^{(1)}$  et  $P_{\bar{f}}^{(1)}$  le sont.*

**Exemple 3.10 (Suite et fin)** *Reprenons le problème d'équivalence des équations du second ordre. Dans ce cas, la nouvelle variété est  $M^{(1)} = M \times G_1$  de coordonnées locales  $(t, x, p, a_1)$ .*

*Le nouveau groupe structural est réduit à l'identité car le degré d'indétermination est nul. La prolongation donne alors une  $\{e\}$ -structure dont les équations de structure sont obtenues en rajoutant aux équations*

$$d \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\pi^1 & 0 \\ 0 & -\pi^1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta^2 \wedge \theta^3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

*la différentielle de la forme  $\pi^1$*

$$d\pi^1 = T_{23}^4 \theta^2 \wedge \theta^3.$$

*La forme  $\pi^1$  sera notée  $\theta^4$  et ça sera notre convention de notation dans la suite. L'invariant  $T_{23}^4$  est explicitement donné par*

$$T_{12}^4 = \frac{-f_{pp}p^2 + 4f_p p - 6f}{p}.$$

*En fin, le nouveau système est en involution.*



# Chapitre 4

## Symétries

### Introduction

Ce chapitre est dédié aux symétries des diffiétés. La première partie est un bref rappel sur le sujet. On verra qu'une symétrie d'une diffiété  $\mathcal{E}$  est un difféomorphisme, appartenant à un certain pseudo-groupe de Lie  $\Phi$ , qui préserve la structure de contact de la diffiété. Le pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  étant fixé, de telles transformations forment un pseudo-groupe de Lie dont les équations de définition sont, en général, non linéaires.

Les générateurs infinitésimaux des groupes de symétries à un paramètre sont solutions d'un système EDP linéaire, appelé équations de Lie. Cette approche, vieille de plus d'un siècle, est connue sous le nom de méthode de Lie.

En guise d'exemple, nous considérons l'équation de Liénard  $\ddot{x} = f(x)\dot{x} + g(x)$  et le pseudo-groupe, formé des transformations de la forme  $(t, x) \rightarrow (at + \alpha(x), \beta(x))$  qui ont la propriété d'envoyer une solution périodique sur une autre solution périodique. Les équations de Lie dépendent ici de  $f$  et  $g$  et nous verrons comment ROSENFELD-GRÖBNER permet de discuter de la structure de l'algèbre de Lie de symétries en fonction de  $f$  et  $g$ .

Dans un deuxième temps, nous verrons que contrairement à la méthode de Lie, la méthode de Cartan permet de calculer le pseudo-groupe de symétrie tout entier. Une symétrie, dans le formalisme du chapitre précédent, est une solution du problème de self-équivalence de la diffiété avec elle-même pour les transformations  $\varphi \in \Phi$ . On présentera une méthode simple, basée sur la méthode de Cartan, qui permet de calculer le pseudo-groupe de symétrie de la diffiété quand celui-ci est de dimension nulle.

Dans la dernière partie, on se donne à la place de diffiété  $\mathcal{E}$  une famille de diffiétés  $\mathcal{E}_\alpha$  indexée par un certain nombre de paramètres  $\alpha$ . Nous verrons comment déterminer les transformations du pseudo-groupe qui laissent cette famille invariante. Ces transformations sont appelées symétries de la famille de diffiétés  $\mathcal{E}_\alpha$ .

Le calcul du changement de variables, qui réalise l'équivalence entre deux diffiétés, est fortement lié au calcul du pseudo-groupe de symétries. En particulier, si le pseudo-groupe de symétries est de dimension nulle alors le changement de variables est obtenu sans intégrer d'équations différentielles.

## 4.1 La notion de symétrie

Pour définir la notion de symétrie en toute généralité on se donne un groupe  $\Phi$  opérant sur un ensemble  $E$ . Une *symétrie* de l'objet  $x \in E$  est alors un élément  $\varphi \in \Phi$  appartenant au groupe d'isotropie de  $x$ . Dans la suite  $E$  est une famille de diffiétés  $\mathcal{E}_f = (M, \Delta_f)$

**Définition 4.1** Une *symétrie (interne)* de la diffiété  $\mathcal{E}_f = (M, \Delta_f)$  est un difféomorphisme local  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(M)$  qui préserve la structure de contact de  $\mathcal{E}_f$  i.e.

$$\varphi_*(\Delta_f) = \Delta_f.$$

Les symétries de la diffiété  $\mathcal{E}_f$  forment un pseudo-groupe de Lie noté  $\text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_f)$ . Comme la distribution  $\Delta_f$  est involutive,  $\text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_f)$  est le pseudo-groupe de symétries d'un feuilletage. Un tel pseudo-groupe est de dimension infinie.

**Exemple 4.1** Soit  $M$  la variété de coordonnées locales  $(x, y^1, \dots, y^n)$ . Tout feuilletage sur  $M$ , de codimension  $n$ , est localement redressable en (les  $C_i$  étant des constantes arbitraires)

$$y^1 = C_1, \dots, y^n = C_n.$$

La transformation fiber-preserving  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(M)$

$$(x, y^1, \dots, y^n) \rightarrow (\varphi^0(x, y^1, \dots, y^n), \varphi^1(y^1, \dots, y^n), \dots, \varphi^n(y^1, \dots, y^n)),$$

où les fonctions  $\varphi^i$  sont arbitraires, est une symétrie du feuilletage car elle envoie une feuille sur une autre—voir figure 4.1. Le pseudo-groupe de symétries du feuilletage est bien de dimension infinie.

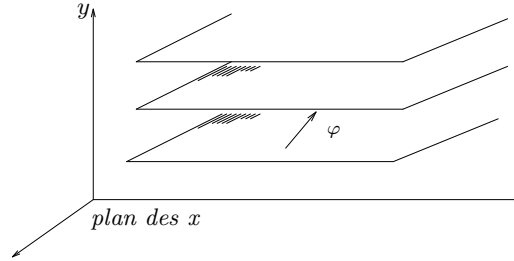


FIG. 4.1 – La transformation  $\varphi$  est une symétrie du feuilletage.

Par la suite, nous allons nous intéresser qu'aux symétries de la diffiété  $\mathcal{E}_f$  qui appartiennent à un certain pseudo-groupe de Lie  $\Phi \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(M)$ . Autrement dit, aux transformations  $\varphi$  qui vérifient le système EDP non linéaire

$$\varphi_*(\Delta_f) = \Delta_f \text{ et } \varphi \in \Phi \quad (4.1)$$

où la deuxième contrainte signifie que  $\varphi$  satisfait les équations de définition du pseudo-groupe de Lie  $\Phi$ . De telles symétries forment un pseudo-groupe de Lie noté  $\mathcal{S}_f$ , égal donc à l'intersection  $\text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_f) \cap \Phi$  et dont les équations de définition sont les équations (4.1).

Dans le formalisme de la méthode d'équivalence  $\mathcal{S}_f$  est formé par les transformations  $\varphi$  solutions du problème de self-equivalence de la diffiété  $\mathcal{E}_f$  avec elle même pour les transformations prises dans  $\Phi$ .

**Exemple 4.2** Considérons la famille d'équations différentielles du 2<sup>e</sup> ordre

$$y'' = f(x, y, y').$$

et le pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  formé des transformations  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$  de la forme ( $\eta_y \neq 0$ )

$$(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x + C, \eta(x, y)).$$

On sait que toute équation  $y'' = f(x, y, y')$  définit une diffiété  $\mathcal{E}_f = (M, \Delta_f)$  de coordonnées locales  $(x, y, p = y') \in \mathbb{C}^3$ . La distribution de Cartan  $\Delta_f$  est engendrée par les deux formes

$$dy - p dx, \quad dp - f(x, y, p) dx.$$

Dans ce cas, le pseudo-groupe  $\mathcal{S}_f = \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_f) \cap \Phi$  est formé des transformations  $\varphi \in \Phi$  telle que

$$\varphi^* \begin{pmatrix} d\bar{y} - \bar{p} d\bar{x} \\ d\bar{p} - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy - p dx \\ dp - f(x, y, p) dx \end{pmatrix}$$

où  $d\bar{x} = dx$ ,  $d\bar{y} = \bar{y}_x dx + \bar{y}_y dy$  et  $\bar{y}_y \neq 0$ . On obtient le système EDP

$$\begin{aligned} \bar{p} - \bar{y}_x - p \bar{y}_y &= 0, \\ \bar{y}_{xx} + 2p \bar{y}_{xy} + p^2 \bar{y}_{yy} + f(x, y, p) \bar{y}_y - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) &= 0, \\ \bar{x}_x - 1 &= 0, \quad \bar{x}_y = 0, \quad \bar{y}_y \neq 0 \end{aligned}$$

qui est bien non linéaire en les inconnues  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  lorsque la fonction  $f$  l'est.

## 4.2 La méthode de Lie

Les équations non linéaires (4.1) se simplifient en un système EDP linéaire, appelée *équations de Lie*, si on se limite au calcul des générateurs infinitésimaux du pseudo-groupe  $\mathcal{S}_f$ . Cette technique, vieille de plus d'un siècle, est connue sous le nom de *méthode de Lie*. Une bonne référence de ce qui va suivre est le livre [KN63] mais aussi [Olv93] et [BK89].

**Définition 4.2** Soit  $G$  un groupe de Lie de dimension  $r$ . Un groupe à  $r$  paramètres de transformations d'une variété  $M$  est une application analytique de  $G \times M$  dans  $M$

$$(\varepsilon, p) \in G \times M \rightarrow \varphi_\varepsilon(p) \in M \tag{4.2}$$

qui satisfait les conditions suivantes

- \* Pour tout  $\varepsilon \in G$ ,  $\varphi_\varepsilon : p \rightarrow \varphi_\varepsilon(p)$  est une transformation de  $M$ .
- \* Pour tous  $\varepsilon, \tau \in G$  et  $p$  dans  $M$ ,  $\varphi_{\varepsilon+\tau}(p) = \varphi_\varepsilon \circ \varphi_\tau(p)$ .
- \* Si  $e$  désigne l'élément neutre de  $G$  alors  $\varphi_e$  est la transformation identique.

Lorsque  $r = 1$ , on dira qu'il s'agit d'un groupe à un paramètre. On montre que tout groupe à  $r$  paramètres est engendré par ses sous-groupes à un paramètre. Ainsi, par exemple, pour montrer l'invariance d'un objet sous l'action d'un groupe de transformations à  $r$  paramètres, il suffit de le faire par rapport à chacun de ses sous-groupes à un paramètre.



Tout groupe à un paramètre de transformations  $\varphi_\varepsilon$  induit un champ de vecteur  $X$  de la façon suivante. Pour tout point  $p \in M$ ,  $X_p$  est le vecteur tangent à la courbe  $\gamma(\varepsilon) = \varphi_\varepsilon(p)$  au point  $p = \varphi_0(p)$  i.e.

$$\left. \frac{d\varphi_\varepsilon(p)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = X_p. \quad (4.3)$$

Le champ de vecteurs  $X$  est appelé *générateur infinitésimal* associé au groupe à un paramètre  $\varphi_\varepsilon$ .

Réciproquement, à tout champ de vecteur  $X$  on associe un groupe “local” à un paramètre de transformations :

**Proposition 4.1** *Soit  $X$  un champ de vecteur sur une variété  $M$ . Pour tout  $p_0 \in M$  il existe un voisinage  $U$  de  $p_0$ , un réel positif  $a$  et un groupe local à un paramètre de transformations  $\varphi_\varepsilon : U \rightarrow M$ ,  $\varepsilon \in ]-a, a[$  tel que  $X$  est le générateur infinitésimal associé.*

Le difféomorphisme  $M \ni p \rightarrow \varphi_\varepsilon(p) \in M$  s’appelle le *flot* (ou la dynamique) engendré par  $X$ . Lorsque l’on peut prendre  $\varepsilon = \infty$ , pour tout point  $p_0$  dans le théorème, on dit que  $X$  est *complet*.

**Proposition 4.2** *Sur une variété compacte  $M$ , tout champ de vecteurs  $X$  est complet.*

Malgré tout comme  $\varphi_\varepsilon(p)$  et son inverse  $\varphi_{-\varepsilon}(p)$  existent toujours localement à  $\varepsilon$  petit, on peut “pousser” ou “tirer” n’importe quel tenseur localement pour  $\varepsilon$  petit. En prenant la version infinitésimale de ces opérations on obtient la dérivée de Lie (dans la direction  $X$ ) du tenseur.

**Définition 4.3 (dérivée de Lie)** *Soient  $\varphi_\varepsilon$  un groupe à un paramètre de transformations et  $X$  le générateur infinitésimal associé. L’opérateur agissant sur un champ de tenseurs quelconque*

$$\mathcal{L}_X : \Gamma(\otimes^r TM \otimes^s T^*M) \rightarrow \Gamma(\otimes^r TM \otimes^s T^*M)$$

*et défini par*

$$\mathcal{L}_X = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_\varepsilon^* - \text{Id}}{\varepsilon}$$

*est appelé la dérivée de Lie dans la direction  $X$ .*

Il en découle de cette définition que

$$\varphi_\varepsilon^* = \text{Id} + \varepsilon \mathcal{L}_X + O(\varepsilon^2). \quad (4.4)$$

On montre que pour tout champ de vecteur  $Y$ , on a  $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$  (voir page 126 pour plus de propriétés).

### 4.2.1 Équations de Lie

Revenons aux symétries des diffiétés et intéressons nous aux groupes à un paramètre de symétries. D’après (4.3), il s’agit de chercher les symétries (qui appartiennent à un certain pseudo-groupe de Lie  $\Phi \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(M)$ ) de la forme  $\varphi_\varepsilon(p) = p + \varepsilon X(p) + O(\varepsilon^2)$  pour tout  $p \in M$ .

**Proposition 4.3** *Soient  $\Delta$  une distribution définie sur  $M$ ,  $\varphi_\varepsilon$  un groupe à un paramètre  $\varepsilon$  de transformations de  $M$  et  $X$  le générateur infinitésimal associé. La transformation  $\varphi_\varepsilon$  est une symétrie de la distribution  $\Delta$  si et seulement si*

$$\mathcal{L}_X \Delta = 0 \quad \text{mod } \Delta. \quad (4.5)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer (4.4) à  $\varphi_\varepsilon^*(\Delta) = \Delta$ .

CQFD

Les champs de vecteurs  $X$  qui vérifient les EDP linéaires (4.5), appelées *équations de Lie*, forment une  $\mathbb{K}$ -algèbre de Lie, qui peut être de dimension infinie.

Il est utile de formuler les équations de Lie (4.5) dans cadre des  $G$ -structures.

**Proposition 4.4** *Soient  $\varphi_\varepsilon$  un groupe à un paramètre  $\varepsilon$  de transformations de  $M$  et  $X$  le générateur infinitésimal associé. Le difféomorphisme  $\varphi_\varepsilon$  est un automorphisme de la  $G$ -structure  $P = (M, G, \theta)$  si et seulement si*

$$\mathcal{L}_X \theta = 0. \quad (4.6)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer (4.4) à  $\varphi_\varepsilon^*(\theta) = \theta$ .

CQFD

### 4.2.2 Exemple : Équation de Liénard

Considérons le pseudo-groupe de Lie formé des transformations  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$  de la forme

$$\begin{cases} \bar{t} &= at + \alpha(x), & a \neq 0 \\ \bar{x} &= \beta(x), & \beta_x \neq 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $a \in \mathbb{R}$  est une constante arbitraire et  $\alpha, \beta$  deux fonctions arbitraires d'une variable.

**Proposition 4.5** *Une transformation de la forme (4.7) envoie une fonction périodique  $x(t)$  de période  $T$  sur une autre fonction périodique, de période  $aT$ .*

DÉMONSTRATION. Montrons qu'il existe  $\bar{T}$  telle que  $\bar{x}(\bar{t} + \bar{T}) = \bar{x}(\bar{t})$ .

Le graphe de  $x(t)$  est invariant par la translation  $\lambda_T : (x, t) \rightarrow (x, t + T)$ .

$$\begin{array}{ccc} (x, t) & \xrightarrow{\lambda_T} & (x, t + T) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ (\beta(x), \alpha(x) + at) & \xrightarrow{\lambda_{aT}} & (\beta(x), \alpha(x) + a(t + T)) \end{array}$$

On en déduit que le graphe de  $\bar{x}(\bar{t})$  est invariant par la transformation  $\varphi \circ \lambda_T \circ \varphi^{-1}$ . Le calcul montre (voir dessin ci-dessus) que cette transformation est la translation  $\lambda_{aT}$  donc la fonction  $\bar{x}(\bar{t})$  est périodique de période  $\bar{T} := aT$ .

CQFD

Le but de cet exemple est de discuter de la structure l'algèbre de Lie de symétries de la forme (4.7) de l'équation de Liénard

$$\ddot{x} = f(x)\dot{x} + g(x), \quad (4.8)$$

en fonction de  $f$  et  $g$ . Nous allons voir que cette discussion peut être menée automatiquement à l'aide de l'algorithme ROSENFELD-GRÖBNER.

#### 4.2.2.1 Génération des équations de Lie

Déterminons, tout d'abord, les générateurs infinitésimaux  $X$  dont les flots sont de la forme (4.7). Pour cela, posons

$$\bar{t} = t + \varepsilon A(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad \bar{x} = x + \varepsilon B(x, t) + O(\varepsilon^2),$$

dans les équations de définition du pseudo-groupe (4.7) i.e. les équations

$$\frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial x \partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \neq 0.$$

On obtient

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x \partial t} = 0, \quad \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} = 0.$$

Ce qui permet de déduire que  $X$  est de la forme

$$X = (\lambda t + A(x)) \frac{\partial}{\partial t} + B(x) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Les équations de Lie s'obtiennent en écrivant que le crochet de Lie  $[X, D_t]$  est nul modulo le champ de Cartan  $D_t = \frac{\partial}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial x} + (f(x)p + g(x)) \frac{\partial}{\partial p}$  avec  $p = \dot{x}$ . On obtient le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} Bg_x + B_x g - 2\lambda g &= 0, \\ B_{x,x} - 2A_x f &= 0, \\ A_{x,x} &= 0, \\ Bf_x + 3A_x g + \lambda f &= 0, \\ \lambda_x &= 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Ce système qui dépend des deux fonctions arbitraires  $f$  et  $g$  est bien linéaire en les inconnues  $A, B, \lambda$ . Il peut être simplifié en calculant un ensemble caractéristique. L'algorithme de François Boulier, conçu pour traiter de tel systèmes par scindage permet de mener la discussion de la structure de l'algèbre de Lie en fonction de  $f$  et  $g$ . Il suffit pour cela de choisir un classement qui élimine les fonctions inconnues  $A, B, \lambda$  par rapport aux fonctions arbitraires  $f$  et  $g$ .

Beaucoup de renseignements essentiels sur l'algèbre de Lie des symétries se lisent dans cet ensemble caractéristique. En particulier, la dimension de l'algèbre des symétries est égale au nombre de points sous les escaliers correspondants aux inconnues  $A, B, \lambda$ . Dans le cas où cette dimension est finie (ce qui est le cas ici), le calcul des constantes de structure s'obtiennent à partir d'un développement limité des solutions du système, ce qui ne nécessite aucune intégration d'équation différentielle [Rei91].

#### 4.2.2.2 Détail du résultat

Dans les paragraphes suivants, le lecteur trouvera le détail du résultat produit par ROSENFELD-GRÖBNER appliqué au système (4.9) pour le classement  $[A, B, \lambda] \succ [f, g]$ .

## Le cas générique

Le premier ensemble caractéristique est

$$A_x = 0, \quad B = 0, \quad \lambda = 0.$$

C'est le cas générique car il n'y a aucune contrainte sur les fonctions  $f$  et  $g$ . La dimension de l'algèbre de Lie est égale au nombre de points sous les trois escaliers correspondants aux inconnues  $A$ ,  $B$  et  $\lambda$ . Elle est donc égale à un. De plus, l'intégration montre que cette algèbre est engendrée par le générateur infinitésimal  $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$  dont les flots forment le groupe de Lie à un paramètre  $C$  des translations temporelles.

**Exemple 4.3** *L'équation de Van der Pol*

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

*est un exemple d'équations de cette classe.*

## Cas II.

Il comporte quatre sous-cas. Ici le nombre de points sous les escaliers correspondants aux inconnues  $A$ ,  $B$  et  $\lambda$  (i.e. la dimension l'algèbre de Lie de symétries) est égal à deux.

Remarquons que si  $X_2 = (\lambda t + A(x))\frac{\partial}{\partial t} + B(x)\frac{\partial}{\partial x}$  est un autre champ de vecteur (différent de  $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ ) alors

$$[X_2, X_1] = \lambda X_1.$$

L'algèbre de Lie de symétries est, par conséquent, soit l'algèbre affine  $\mathfrak{a}(1, \mathbb{R})$  si  $\lambda \neq 0$  soit l'algèbre abélienne dans le cas contraire. Dans les deux situations, elle est résoluble et l'équation de Liénard peut alors être réduite en une quadrature par les méthodes de réduction d'ordre [Olv93, BK89].

**Sous-cas II-1.**  $3g_{xx} + 2ff_x \neq 0$  et  $g \neq 0$  Le premier des quatre ensembles caractéristiques est

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_x & = & 0, \\ A_x & = & -\frac{\lambda(fg_{xx} - 2f_x g_x)}{g(3g_{xx} + 2ff_x)}, \\ B & = & -2\frac{\lambda(f^2 + 3g_x)}{3g_{xx} + 2ff_x}, \\ g_{xxx} & = & \frac{5g_{xx}gff_x + 6gg_{xx}^2 - 2gf_x^2 g_x - 3g_{xx}g_x^2 - 2ff_x g_x^2}{g(f^2 + 3g_x)}, \\ f_{xx} & = & \frac{9g_{xx}gff_x - 3g_{xx}g_x f + 6ff_x^2 g - 2f^2 f_x g_x}{2g(f^2 + 3g_x)}. \end{array} \right.$$

Les deux dernières équations (en plus des inéquations) contraignent les fonctions  $f$  et  $g$ . Les autres équations donnent les fonctions  $A$ ,  $B$  et  $\lambda$ . En particulier on voit que  $\lambda$  fournit une constante de structure non nulle. On en déduit alors que l'algèbre de Lie est isomorphe à  $\mathfrak{a}(1)$ .

**Exemple 4.4** Pour donner un exemple de telles équations, on peut prendre

$$\ddot{x} = x\dot{x} + x^3.$$

Les générateurs infinitésimaux sont  $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $X_2 = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x}$  et les transformations correspondantes (les flots générés par  $X_1$  et  $X_2$ ) forment le groupe à deux paramètres  $(\lambda, \mu)$  des transformations spécial-affines

$$(t, x) \rightarrow (\lambda t + \mu, \frac{x}{\lambda}).$$

La jacobienne  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$  d'une telle transformation est de déterminant 1.

**Sous-cas II.2.**  $3g_{xx} = -2ff_x$ ,  $f_{xx} = 0$  et  $g \neq 0$  On a l'ensemble caractéristique

$$\begin{cases} \lambda &= 0, \\ A_x &= -\frac{Bf_x}{3g}, \\ B_x &= \frac{Bg_x}{g}, \\ f_{xx} &= 0, \\ g_{xx} &= -\frac{2}{3}ff_x. \end{cases}$$

La première équation montre que l'algèbre de Lie est l'algèbre abélienne. On intègre les deux dernières équations et on trouve (les constantes  $a_i$  sont arbitraires)

$$\begin{cases} f(x) = a_1x + a_2, \\ g(x) = -\frac{1}{9}a_1^2x^3 - \frac{1}{3}a_1a_2x^2 + a_3x + a_4. \end{cases}$$

On calcul ensuite les fonctions  $A$  et  $B$  en fonction des constantes  $a_i$  et on obtient

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_2 = -x\frac{a_1}{3a_4}\frac{\partial}{\partial t} + \left(1 + x\frac{a_3}{a_4} - x^2\frac{a_2a_1}{3a_4} - x^3\frac{a_1^2}{9a_4}\right)\frac{\partial}{\partial x}. \end{cases}$$

**Sous-cas II.3.**  $3g_{xx} - 2g_x^2 \neq 0$ ,  $f_{xx} \neq 0$  et  $g \neq 0$ . Ici, les fonctions  $A$ ,  $B$  et  $\lambda$  vérifient

$$\begin{cases} \lambda_x &= 0, \\ A_x &= \frac{\lambda(-3gff_{x,x} + 9f_x^2g + f^3f_x)}{9g^2f_{x,x}}, \\ B &= -\frac{\lambda(9gf_x + f^3)}{3gf_{x,x}}, \end{cases}$$

ce qui montre que l'algèbre de Lie des symétries est isomorphe à  $\mathfrak{a}(1, \mathbb{R})$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  vérifient le système d'EDO

$$\begin{cases} f^2 &= -3g_x, \\ g_{xxxx} &= -\frac{1}{2g_x^2g(3gg_{xx} - 2g_x^2)}(2g^2g_{xx}^4 + g_xg_{xx}^2g^2g_{xxx} - 10g_x^2g^2g_{xxx}^2 \\ &\quad - 9g_x^2g_{xx}^3g + 18g_x^3g_{xx}gg_{xxx} + 4g_x^4g_{xx}^2 - 8g_{xxx}g_x^5). \end{cases}$$

**Exemple 4.5** Un exemple d'équation de cette classe est donné par l'équation

$$\ddot{x} = x^2\dot{x} - \frac{1}{15}x^5$$

pour laquelle on trouve  $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$  et  $X_2 = t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x}$ . Les flots correspondants forment le groupe à deux paramètres  $(\lambda, \mu)$  des transformations affines

$$(t, x) \rightarrow (\lambda t + \mu, \frac{x}{\sqrt{\lambda}}).$$

**Sous-cas II.4.**  $g = 0, ff_x \neq 0$ . Le dernier sous-cas correspond à

$$\begin{cases} \lambda_x &= 0, \\ A_x &= \frac{\lambda(f_x^2f_{xx} + f f_x f_{xxx} - 2ff_{xx}^2)}{2f_x^3f}, \\ B &= -\frac{\lambda f}{f_x}, \\ f_{xxxx} &= \frac{-ff_x^3f_{xxx} - 6f_{xx}^3f^2 + 6f^2f_x f_{xx} f_{xxx} + f_{xx}^2ff_x^2 + f_x^4f_{xx}}{f^2f_x^2}, \\ g &= 0. \end{cases}$$

On en déduit que l'algèbre de Lie est non abélienne et par conséquent isomorphe à  $\mathfrak{a}(1, \mathbb{R})$ .

**Exemple 4.6** Un exemple d'équation de cette classe est

$$\ddot{x} = x\dot{x}$$

pour laquelle on a  $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $X_2 = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x}$ . Les flots générés par ces deux champs de vecteurs sont les transformations affines

$$(t, x) \rightarrow (\lambda t + \mu, \frac{x}{\lambda}).$$

**Remarque 4.1** Pour une équation de Liénard telle que  $g = 0$  on a l'intégrale première

$$t - \int^x \frac{1}{f(s) + C}.$$

Ainsi, de telles équations ne peuvent pas avoir de cycles limites.

#### 4.2.2.3 Troisième cas $g \neq 0$

La représentation caractéristique est

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_x & = & 0, \\ A_x & = & -\frac{f(9\lambda g - Bf^2)}{27g^2}, \\ B_x & = & \frac{6\lambda g - Bf^2}{3g}, \\ f_x & = & -\frac{f^3}{9g}, \\ g_x & = & \frac{f^2}{3} \end{array} \right.$$

Le nombre de points sous les escaliers de  $\lambda$ ,  $A$  et  $B$  montre que l'algèbre de Lie est de dimension trois. L'intégration des deux dernières équations, contraignant les fonctions  $f$  et  $g$ , donne

$$\{g(x) = a_1, f(x) = 0\}, \left\{ f(x) = a_1x + a_2, g(x) = -\frac{(a_1x + a_2)^3}{9a_1} \right\}.$$

D'autre part, le calcul du développement de Taylor au voisinage de zéro des fonctions  $\lambda$ ,  $A$  et  $B$ , permet de construire une base de l'algèbre de Lie en prenant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_1 & = & \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_2 & = & \left(x \frac{f(0)}{3g(0)} + t\right) \frac{\partial}{\partial t} + \left(2x - x^2 \frac{f(0)^2}{3g(0)} + \frac{1}{81} x^3 \frac{f(0)^4}{g(0)^2}\right) \frac{\partial}{\partial x} \\ X_3 & = & x \frac{f(0)^3}{27g(0)^2} \frac{\partial}{\partial t} + \left(1 - x \frac{f(0)^2}{3g(0)} + x^2 \frac{f(0)^4}{27g(0)^2} - x^3 \frac{1}{729} \frac{f(0)^6}{g(0)^3}\right) \frac{\partial}{\partial x}, \end{array} \right.$$

où  $f(0), g(0)$  désignent les valeurs des fonctions  $f$  et  $g$  en  $x = 0$ .

#### 4.2.2.4 Quatrième cas

Ce cas correspond à l'ensemble caractéristique

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda & = & 0, \\ A_{x,x} & = & 0, \\ B_{x,x} & = & 2A_x f \\ f_x & = & 0, \\ g & = & 0. \end{array} \right.$$

On en déduit que la dimension de l'algèbre de Lie de symétries est égale à 4. De plus, l'équation de Liénard (4.8) est réduite à  $(a \in \mathbb{R})$

$$\ddot{x} = a\dot{x}.$$

On trouve les générateurs infinitésimaux

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = x \frac{\partial}{\partial t} + x^2 \frac{\partial}{\partial x},$$

qui engendrent l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ . Les flots associés sont les transformations à 4 paramètres  $(\varepsilon, \mu, \nu, \sigma)$

$$(t, x) \rightarrow (t - \ln(1 - \varepsilon x) + \mu, \sigma \frac{x}{1 - \varepsilon x} + \nu).$$

#### 4.2.2.5 Cinquième cas

Pour ce dernier cas l'ensemble caractéristique est

$$\begin{cases} \lambda_x &= 0, \\ A_{xx} &= 0, \\ B_{xx} &= 0, \\ f &= 0, \\ g &= 0. \end{cases}$$

L'équation de Liénard s'écrit alors

$$\ddot{x} = 0.$$

Dans ce cas, l'algèbre de Lie cherchée est engendrée par les champs de vecteurs

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = x \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_5 = t \frac{\partial}{\partial t}.$$

Les flots correspondants forment le groupe à cinq paramètres  $(\lambda, \mu, \varepsilon, \rho, \sigma)$

$$(t, x) \rightarrow (\lambda t + \mu + \varepsilon x, \rho x + \sigma).$$

### 4.3 Pseudo-groupes discrets de symétries

Soit  $\mathcal{E}_f$  une équation différentielle ordinaire d'ordre  $n + 1$

$$y^{(n+1)} = f(x, y, y' \dots, y^{(n)})$$

où  $f$  est une fonction rationnelle de  $M := J^n(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  dans  $\mathbb{C}$  fixée. Posons  $m := \dim(M) = n + 2$ . Soit  $\Phi \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(M)$  un pseudo-groupe de Lie dont les équations de définition sont données par un ensemble caractéristique quasi-linéaire (voir la définition 2.5 page 41). Supposons que le pseudo-groupe de symétries  $\mathcal{S}_f = \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_f) \cap \Phi$  est de dimension nulle. Le but est de présenter une méthode simple, basée sur la méthode de Cartan, permettant de calculer  $\mathcal{S}_f$ .

Signalons qu'en principe, la méthode de force brute (chapitre deux) permet de calculer  $\mathcal{S}_f$  directement à partir du système EDP (voir aussi [RWW93])

$$\varphi_*(\Delta_f) = \Delta_f \text{ et } \varphi \in \Phi. \quad (4.10)$$



**Exemple 4.7** *Considérons l'équation différentielle  $y'' = y^3$  et le pseudo-groupe de Lie sur  $\mathbb{C}^2$ , formé des transformations ( $\eta_y \neq 0$ )*

$$(x, y) \rightarrow (x, \eta(x, y)). \quad (4.11)$$

*Dans ce cas, le système (4.10) s'écrit*

$$\begin{aligned} \eta_x + 2p\eta_{xy} + p^2\eta_{yy} + y^3\eta_y - \eta^3 &= 0, \\ \eta_p &= 0, \eta_y \neq 0. \end{aligned}$$

*Appliqué à ce système, ROSENFELD-GRÖBNER donne l'ensemble caractéristique  $\eta^2 = y^2$ . Ce qui signifie que les symétries de la forme (4.11), de l'équation  $y'' = y^3$ , forment un groupe discret isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .*

Toutefois, ce calcul peut être très lent ; c'est assez imprévisible.

Parallèlement, P. Hydon [Hyd98a, Hyd98b, Hyd00, LPH03] propose une méthode basée sur l'action adjointe d'une symétrie quelconque sur l'algèbre de Lie de symétries. Cette méthode ne marche que lorsque l'équation admet au moins un groupe à un paramètre de symétries. Dans le cas contraire, la méthode de Hydon ne s'applique pas.

### 4.3.1 Solution : Utilisation des invariants

Le pseudo-groupe  $\mathcal{S}_f$  (qui est de cardinal fini, d'après le thm 2.5 page 57) est majoré par l'ensemble des transformations  $\varphi$  solutions du système d'équations algébriques

$$(\varphi^* I_f^1 = I_f^1, \varphi^* I_f^2 = I_f^2, \dots, \varphi^* I_f^m = I_f^m), \quad (4.12)$$

où  $I_f^1, \dots, I_f^m$  sont  $m = n + 2$  invariants fonctionnellement indépendants associés à la diffiété  $\mathcal{E}_f$ . L'existence de tels invariants est assurée par la proposition 3.3 page 63. De plus, ces invariants ne sont pas durs à trouver puisqu'il suffit que leurs différentielles soient linéairement indépendantes.

On résout le système précédent par un calcul d'ensemble caractéristique à l'aide de ROSENFELD-GRÖBNER.

**Lemme 4.1** *Sous les hypothèses introduites au début de cette section, les fonctions  $I_f^i$  sont algébriques.*

Une fois l'ensemble caractéristique est calculé, pour obtenir le pseudo-groupe de symétries  $\mathcal{S}_f$ , il suffit d'essayer les solutions du système (4.12), qui sont au nombre fini, sur la diffiété  $\mathcal{E}_f$ . En éliminant celles qui ne vérifient pas ce critère, on obtient le pseudo-groupe  $\mathcal{S}_f$ .

On peut présenter le raisonnement précédent sous forme algorithmique ci-dessous.

### 4.3.2 Illustrations

Considérons le problème d'équivalence des équations différentielles du 2<sup>e</sup> ordre  $y'' = f(x, y, y')$  pour les transformations  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$  de la forme

$$\begin{cases} \bar{x} &= x + C, \\ \bar{y} &= \eta(x, y), \quad \eta_y \neq 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

---

procédure de calcul de pseudo-groupes discrets de symétries

---

**Input:** Une équation  $\mathcal{E}_f$  et un pseudo-groupe  $\Phi$  tel que  $\dim(\mathcal{S}_f) = 0$

**Output:**  $\mathcal{S}_f$

- 1- calculer, pour diffiété  $\mathcal{E}_f$ ,  $m$  fonctions invariantes  $I_f^1, \dots, I_f^m$ , fonctionnellement indépendantes, tous définies sur  $M$ ,
  - 2- construire le système (4.12),
  - 3- résoudre (à l'aide d'un algorithme spécialisé) le système (4.12),
  - 4- voir parmi les solutions celles qui sont symétries en les substituant dans la diffiété.
- 

Nous allons illustrer la méthode précédente sur plusieurs exemples d'équations du second ordre. Mais avant, construisons nos invariants.

On se place sur l'espace des jets  $M := J^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  de coordonnées locales  $(x, y, y' = p) \in \mathbb{C}^3$ .

**Proposition 4.6** *Deux équations différentielles ordinaires du second ordre  $y'' = f(x, y, y')$  et  $y'' = \bar{f}(x, y, y')$  sont équivalentes par une transformation de la forme (4.13) s'il existe des fonctions  $a_1, a_2$  et  $a_3$  de  $M$  dans  $\mathbb{C}$  telles que*

$$\underbrace{\varphi^* \begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p} d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix}}_{\omega_{\bar{f}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(a) \in G} \underbrace{\begin{pmatrix} dp - f(x, y, p) dx \\ dy - p dx \\ dx \end{pmatrix}}_{\omega_f}. \quad (4.14)$$

On se ramène donc à l'équivalence des  $G$ -structures  $P_f = (M, G, \theta_f = S(a)\omega_f)$ .

Après deux normalisations et une prolongation, la méthode de Cartan fournit une famille de  $\{e\}$ -structures définies sur la variété  $\tilde{M}$  de coordonnées locales  $(x, y, p, a) \in \mathbb{C}^4$  avec  $a = a_3$  le paramètre du groupe structural. On obtient, les invariants fondamentaux [Neut]

$$I_1 = -\frac{1}{4}(f_p)^2 - f_y + \frac{1}{2}D_x f_p, \quad I_2 = \frac{f_{ppp}}{2a^2}, \quad I_3 = \frac{f_{yp} - D_x f_{pp}}{2a}, \quad (4.15)$$

et les dérivations invariantes

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial p}, & X_2 &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{f_p}{a} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{2} f_{pp} \frac{\partial}{\partial a}, \\ X_3 &= D_x - \frac{1}{2} f_p a \frac{\partial}{\partial a}, & X_4 &= a \frac{\partial}{\partial a}, \end{aligned}$$

où  $D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + f(x, y, p) \frac{\partial}{\partial p}$  désigne le champ de Cartan.

**Remarque 4.2** *Lorsqu'on calcule les invariants à l'aide de la méthode de Cartan (ce qui est notre cas dans cette thèse), ces invariants sont (en général) définis sur une variété fibrée au dessus de la variété de base  $M$ .*

*Ils peuvent donc dépendre d'un certain nombre de paramètres accessoires. Le procédé général pour obtenir des invariants définis sur la variété de base (indépendants des*

*paramètres) est la (post-) normalisation (voir chapitre suivant). Toutefois, dans beaucoup d'exemples le système de poids permet de construire de tels invariants sans post-normaliser.*

Dans notre exemple, la dérivation  $X_4$  engendre la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h} = \text{span}(X_4)$  et induit un système de poids de la façon suivante : le poids de l'objet  $H$  défini sur  $M$  est l'entier, noté  $\deg(H)$ , défini par

$$X_4(H) = \deg(H)H.$$

On déduit, par exemple, que le paramètre  $a$  est de poids égal à un, l'invariant  $I_1$  et la dérivation invariante  $X_3$  sont de poids zéro. Remarquer qu'une fonction de poids zéro est une fonction qui ne dépend pas du paramètre  $a$ .

Maintenant, suivant la règle

$$\deg(X \circ Y) = \deg(X) + \deg(Y).$$

on en déduit que tout invariant de la forme  $I_{1,3..3}$  est un invariant de poids zéro i.e. défini sur  $M$ . La notation  $I_{i,j...k}$  désigne l'invariant  $X_k \cdots X_j(I_i)$ .

**Lemme 4.2** *Les invariants  $I_1$ ,  $I_{1,3}$  et  $I_{1,33}$  sont génériquement fonctionnellement indépendants.*

DÉMONSTRATION. Pour que les invariants  $I_1$ ,  $I_{1,3}$  et  $I_{1,33}$  soient fonctionnellement dépendants il faut et il suffit que les différentielles  $dI_1$ ,  $dI_{1,3}$  et  $dI_{1,33}$  soient linéairement indépendants. Ceci implique que  $f$  vérifie l'équation aux dérivées partielles d'ordre 5

$$\det \begin{pmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} & I_{1,3} \\ I_{1,31} & I_{1,32} & I_{1,33} \\ I_{1,331} & I_{1,332} & I_{1,333} \end{pmatrix} = 0.$$

Ce qui est un cas très particulier.

CQFD

**1ère illustration (Painlevé PI)** On veut calculer pour la première équation de Painlevé

$$y'' = 6y^2 + x \tag{4.16}$$

le pseudo-groupe de symétries  $S \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$ , de la forme ( $\eta_y \neq 0$ )

$$(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x + C, \eta(x, y)).$$

On montre facilement par la méthode de Lie que  $S$  est de dimension nulle. Dans ce cas l'équation de Painlevé admet trois invariants fonctionnellement indépendants, définis sur la variété  $M = \{(x, y, p) \in \mathbb{C}^3\}$ . En effet, l'évaluation des invariants  $I_1$ ,  $I_{1,3}$  et  $I_{1,33}$  (construits à partir des données de la page 87) sur cette équation donne

$$I_1 = 12y, \quad I_{1,3} = -12p, \quad I_{1,33} = -72y^2 - 12x.$$

On vérifie facilement qu'ils sont fonctionnellement indépendants.

Maintenant, si une transformation  $\varphi$  est une symétrie de la première équation de Painlevé alors sa première prolongation  $(x, y, p) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$  vérifie les égalités

$$I(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = I(x, y, p), \quad \forall I \in \{I_1, I_{1;3}, I_{1;33}\},$$

c'est à dire le système

$$12\bar{y} = 12y, \quad -12\bar{p} = -12p, \quad -72\bar{y}^2 - 12\bar{x} = -72y^2 - 12x.$$

On en déduit donc que la seule symétrie de la forme  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$  admise par la première équation de Painlevé est l'identité.

**Proposition 4.7** *Le pseudo-groupe de symétries de la forme  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$  de la première équation de Painlevé  $y'' = 6y^2 + x$  est réduit à l'identité.*

**2nd illustration (Équation d'Emden-Fowler)** On veut déterminer pour l'équation d'Emden-Fowler [Ros84, PZ95, Kam44]

$$y'' = \frac{1}{xy^2}, \tag{4.17}$$

le pseudo-groupe de symétries  $S \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$ , de la forme  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$  avec  $\eta_y \neq 0$ .

La méthode de Lie montre qu'un tel pseudo-groupe est de dimension nulle. L'équation d'Emden-Fowler admet donc trois invariants fonctionnellement indépendants définis sur la variété  $M = \{(x, y, p) \in \mathbb{C}^3\}$ . Ces invariants sont obtenus en spécialisant les invariants  $I_1, I_{1;3}$  et  $I_{1;33}$  sur cette équation. On trouve

$$I_1 = \frac{2}{xy^3}, \quad I_{1;3} = -2 \frac{y + 3px}{x^2y^4}, \quad I_{1;33} = 2 \frac{3x + 12p^2x^2y + 6pxy^2 + 2y^3}{x^3y^6} \tag{4.18}$$

Comme précédemment, toute symétrie  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \varphi(x, y, p)$  de l'équation d'Emden-Fowler vérifie nécessairement

$$I(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = I(x, y, p), \quad \forall I \in \{I_1, I_{1;3}, I_{1;33}\}.$$

Ce système d'équations algébriques peut être simplifié par un calcul d'ensemble caractéristique pour le classement  $\bar{p} \succ p \succ \bar{y} \succ y \succ \bar{x} \succ x$ . On obtient les deux ensembles caractéristiques suivants

$$\bar{p} = \bar{y} \frac{x + 2\bar{x}}{3x\bar{x}}, \quad \bar{y}^3 = y^3 \frac{x}{\bar{x}}, \quad \bar{x} = \frac{yx}{3px - 2y}$$

et

$$\bar{p} = \frac{\bar{y}p}{y}, \quad \bar{y}^3 = y^3, \quad \bar{x} = x.$$

Les transformations de la première représentation caractéristique n'appartiennent pas au pseudo-groupe de transformations autorisées ( $\bar{x}$  n'est pas de la forme  $x + C$ ). Elles

sont donc éliminées. Voyons ce qu'il en est des transformations du deuxième ensemble, qui s'écrivent sous la forme

$$\bar{p} = \lambda p, \quad \bar{y} = \lambda y, \quad \bar{x} = x, \quad \text{avec } \lambda^3 = 1. \quad (4.19)$$

Prolongeons une fois de plus ces transformations, on obtient

$$(x, y, p, q) \rightarrow (x, \lambda y, \lambda p, \lambda q).$$

Substituons ensuite dans l'équation d'Emden-Fowler (4.17). On trouve

$$\lambda^3 y'' = \frac{1}{xy^2}.$$

Comme  $\lambda^3 = 1$ , les transformations (4.19) sont symétries de l'équation d'Emden-Fowler.

**Proposition 4.8** *Le pseudo-groupe de symétries de la forme  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$  de l'équation d'Emden-Fowler  $y'' = \frac{1}{xy^2}$  est donné par*

$$\bar{p} = \lambda p, \quad \bar{y} = \lambda y, \quad \bar{x} = x,$$

avec  $\lambda^3 = 1$ .

## 4.4 Symétries d'une famille de diffiétés

Etant donnée une famille de diffiétés  $\mathcal{E}_f = (M, \Delta_f)$  et le pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  opérant sur  $M$ . Considérons la sous-famille de diffiétés  $\mathcal{E}_\alpha = (M, \mathcal{E}_\alpha)$  définie en prenant  $f$  égale à une fonction particulière mais qui dépend d'un certain nombre de paramètres  $\alpha \in \mathbb{K}^n$ . On suppose que le pseudo-groupe de symétries  $S_\alpha = \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_\alpha) \cap \Phi$  est de dimension nulle pour tout  $\alpha$ .

Le but de cette section est de calculer les transformations  $\varphi \in \Phi$  qui laisse la sous-famille invariante i.e. les transformations  $\varphi \in \Phi$  tel que pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}^n$ ,  $\varphi_*(\mathcal{E}_\alpha)$  est une diffiété de la sous-famille.

**Définition 4.4** *On appellera une telle transformation symétrie de la sous-famille de diffiétés  $\mathcal{E}_\alpha$ . De telles symétries forment un pseudo-groupe de Lie.*

Par la suite, on dira la famille de diffiétés  $\mathcal{E}_\alpha$  et on comprendra qu'il s'agit d'une sous-famille de la famille de diffiétés  $\mathcal{E}_f$ .

### La famille d'équations de Painlevé PII

Considérons la famille d'équations de Painlevé  $\mathcal{E}_\alpha$

$$y'' = 2y^3 + xy + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}^* \quad (4.20)$$

et les transformations  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$ , de la forme  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$  avec  $\eta_y \neq 0$ .

La méthode de Lie montre que le pseudo-groupe de symétries d'une équation quelconque de la famille est de dimension nulle. Dans ce cas, la famille d'équations de Painlevé admet trois invariants fonctionnellement indépendants, tous définis sur la variété  $M$  de coordonnées locales  $(x, y, p = y') \in \mathbb{C}^3$ . Ces invariants sont obtenus en évaluant  $I_1, I_{1;3}$  et  $\frac{I_{1;32}}{I_{1;2}}$ , calculés à partir des données de la page 87, sur la famille d'équations de Painlevé (4.20). On trouve

$$I_1 = 6y^2 + x, \quad I_{1;3} = 1 + 12yp, \quad \frac{I_{1;32}}{I_{1;2}} = \frac{p}{y}.$$

On vérifie qu'ils sont fonctionnellement indépendants (on pouvait très bien prendre les invariants  $I_1, I_{1;3}$  et  $I_{1;33}$  qui sont fonctionnellement indépendants pour cet exemple. Cependant, l'expression de  $I_{1;33}$  est compliquée).

Maintenant, une symétrie de la famille d'équations de Painlevé II est une transformation  $\varphi : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x + C, \eta(x, y))$  qui vérifie

$$\varphi^*(\bar{y}'' - 2\bar{y}^3 - \bar{x}\bar{y} - \bar{\alpha}) = y'' - 2y^3 - xy - \alpha. \quad (4.21)$$

Elle satisfait donc les égalités des invariants

$$6\bar{y}^2 + \bar{x} = 6y^2 + x, \quad 1 + 12\bar{y}\bar{p} = 1 + 12yp, \quad \frac{\bar{p}}{\bar{y}} = \frac{p}{y}.$$

Ce qui permet d'obtenir

$$\bar{p} = p \frac{\bar{y}}{y}, \quad \bar{y}^2 = y^2, \quad \bar{x} = x$$

ou ce qui est équivalent

$$\bar{p} = \lambda p, \quad \bar{y} = \lambda y, \quad \bar{x} = x, \quad \lambda^2 = 1. \quad (4.22)$$

Il nous reste à calculer  $\bar{\alpha}$ . Pour cela, remplaçons (après prolongation) les transformations (4.22) dans une équation de la famille d'équations de Painlevé

$$\bar{y}'' = 2\bar{y}^3 + \bar{x}\bar{y} + \bar{\alpha}$$

on trouve

$$y'' = 2y^3 + xy + \frac{\bar{\alpha}}{\lambda}.$$

Puisque  $\varphi$  est supposée symétrie de la famille, on en déduit alors  $\frac{\bar{\alpha}}{\lambda} = \alpha$ , c'est à dire  $\bar{\alpha} = \lambda\alpha$ .

En résumé, nous avons démontré la proposition suivante

**Proposition 4.9** *Les transformations  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$  qui laissent globalement invariante la famille d'équations de Painlevé  $y'' = 2y^3 + xy + \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  forment un groupe à deux éléments*

$$\bar{y} = \lambda y, \quad \bar{x} = x, \quad \bar{\alpha} = \lambda\alpha, \quad \text{avec } \lambda \in \{+1, -1\}.$$

### La famille d'équations de Yermakov

Considérons l'exemple de la famille d'équations de Yermakov  $\mathcal{E}_\alpha$  [PZ95]

$$y'' = xy + \frac{\alpha}{y^3}, \quad \alpha \in \mathbb{C}^*$$

et les transformations  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$ , de la forme  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$ . La méthode de Lie montre que la dimension du pseudo-groupe de symétries d'une équation quelconque de la famille est nulle quelque soit  $\alpha \neq 0$ .

La famille d'équations de Yermakov admet donc trois invariants fonctionnellement indépendants. En effet, ces invariants sont

$$\frac{\alpha (5p^2y^2 + xy^4 + \alpha)}{y^8}, \quad \frac{p}{y}, \quad \frac{y^5 + 12p\alpha}{y^5}.$$

En écrivant les égalités des invariants, on obtient

$$\bar{p}^4 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} p^4, \quad \bar{y}^4 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} y^4, \quad \bar{x} = x.$$

qui s'écrit sous la forme

$$\bar{p} = \lambda p, \quad \bar{y} = \lambda y, \quad \bar{x} = x,$$

avec  $\lambda^4 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$ . Remplaçons ces transformations dans une équation de la famille d'équations de Yermakov

$$\bar{y}'' = \bar{x}\bar{y} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{y}^3}.$$

On obtient

$$y'' = xy + \frac{\alpha}{y^3},$$

c'est à dire une équation de la famille, quelque soit le paramètre  $\lambda$ .

**Proposition 4.10** *Les transformations  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$  qui laissent globalement invariante la famille d'équations de Yermakov  $y'' = xy + \frac{\alpha}{y^3}$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  forment le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^\times$  de dimension 1 :*

$$\bar{y} = \lambda y, \quad \bar{x} = x, \quad \bar{\alpha} = \lambda^4 \alpha \quad (\lambda \in \mathbb{C}^\times).$$

Remarquons que le pseudo-groupe de symétries de la famille d'équations de Yermakov est un groupe de dimension non nulle même si le pseudo-groupe de symétries d'une équation quelconque de la famille est discret.

### La famille d'équation de Van der Pol

Considérons la famille d'équations de Van der Pol  $\mathcal{E}_\varepsilon$

$$y'' + y - \varepsilon(1 - y^2)y' = 0, \quad x, y, \in \mathbb{C}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}^*.$$

On vérifie que si on se limite aux transformations de la forme  $(x, y) \rightarrow (x, \eta(x, y))$ , alors le pseudo-groupe de symétries d'une équation quelconque de la famille d'équations de Van der Pol est discret.

Nous allons donc calculer le pseudo-groupe de symétries de la famille de la forme

$$(x, y, \varepsilon) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}) = (x, \eta(x, y), \bar{\varepsilon}(x, y, p, \varepsilon)).$$

On sait que dans ce cas, la famille d'équation de Van der Pol admet quatre invariants fonctionnellement indépendants qui peuvent dépendre du paramètre  $a$  (le paramètre de prolongation voir page 87)

$$x, \frac{\varepsilon y}{a}, \frac{-2\varepsilon}{a^2}, \frac{\varepsilon(2p + (\varepsilon - \varepsilon y^2)y)}{2a}$$

On normalise le paramètre  $a$  en posant  $\frac{\varepsilon y}{a} = 1$ . En remplaçant cette valeur dans les autres invariants, on obtient trois invariants fonctionnellement indépendants du paramètre  $a$ .

On écrit ensuite les égalités des invariants, ce qui permet de déduire que

$$\bar{p} = \lambda p, \bar{y} = \lambda y, \bar{x} = x,$$

avec  $\lambda^2 = 1$ . Pour trouver  $\bar{\varepsilon}$ , substituons ces transformations dans

$$\bar{y}'' + \bar{y} - \bar{\varepsilon}(1 - \bar{y}^2)\bar{y}' = 0,$$

on obtient

$$y'' + y - \bar{\varepsilon}(1 - y^2)y' = 0.$$

On déduit que  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$ .

**Proposition 4.11** *Les transformations  $(x, y) \rightarrow (x, \eta(x, y))$  qui laissent globalement invariante la famille d'équations de Van der Pol  $y'' + y - \varepsilon(1 - y^2)y' = 0$  avec  $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$  forment un groupe à deux éléments :*

$$\bar{y} = \lambda y, \bar{x} = x, \bar{\varepsilon} = \varepsilon \text{ avec } \lambda \in \{+1, -1\}.$$





# Chapitre 5

## Calcul du changement de variables

### Introduction

Dans ce chapitre  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . On se donne un problème d'équivalence  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$  défini par une famille de diffiétés  $\mathcal{E}_f = (\Delta_f, M)$  et un pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  opérant sur  $M$ . On suppose que

**Hypothèses  $(\mathcal{H})$  :**

(1) Les équations de définition du pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  sont données par un ensemble caractéristique quasi-linéaire, (2) la diffiété  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  est localement de la forme  $y^{(n+1)} = \bar{f}(x, y, \dots, y^{(n)})$  où la fonction  $\bar{f}$  est rationnelle et enfin (3) le pseudo-groupe de Lie  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  est discret.

Notre but est de présenter une nouvelle méthode permettant de calculer, sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , la transformation  $\varphi \in \Phi$  qui ramène la diffiété générique  $\mathcal{E}_f$  à la diffiété cible  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ . On appellera cette transformation *la forme nécessaire* du changement de variables associée à la diffiété  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  et au pseudo-groupe de Lie  $\Phi$ .

### 5.1 La transformation $\varphi$ s'obtient sans intégration

La variété  $M$  est ici l'espace des jets d'ordre  $n$  des fonctions  $x \rightarrow y(x)$  de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$ . Soit  $x = (x, y, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+2}$  un système de coordonnées locales de  $M$ . Posons  $m := \dim(M) = n + 2$ .

La transformation  $\varphi : x \rightarrow \bar{x}$ , qui réalise l'équivalence entre les deux diffiétés  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ , vérifie le système EDP

$$\varphi^*(\Delta_{\bar{f}}) \subset \Delta_f \text{ et } \varphi \in \Phi.$$

La distribution  $\Delta_f$  est engendrée par le champ de Cartan  $D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + f(x, y, \dots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_{n+1}}$ .

Lorsque  $\Phi \subset \text{Diff}(M)$ , les deux pseudo-groupes de symétries  $\mathcal{S}_f = \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_f) \cap \Phi$  et  $\mathcal{S}_{\bar{f}} = \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_{\bar{f}}) \cap \Phi$  sont des vrais groupes, conjugués par la transformation  $\varphi$ . Autrement dit  $\mathcal{S}_{\bar{f}} = \varphi \mathcal{S}_f \varphi^{-1}$ . Ils ont donc la même dimension. De plus, lorsque cette dimension est nulle on a  $\text{card}(\mathcal{S}_f) = \text{card}(\mathcal{S}_{\bar{f}}) < \infty$ .

$$\sigma_f \in \mathcal{S}_f \quad \left( \mathcal{E}_f \xrightleftharpoons[\varphi^{-1}]{\varphi} \mathcal{E}_{\bar{f}} \right) \quad \sigma_{\bar{f}} \in \mathcal{S}_{\bar{f}}$$

FIG. 5.1 – Lorsque  $\Phi \subset \text{Diff}(M)$ , les groupes de symétries sont conjugués

**Proposition 5.1** *Le groupe  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  opère simplement transitivement sur l'ensemble de transformations  $\Phi_{f,\bar{f}} = \{\varphi \in \Phi \mid \varphi^* \mathcal{E}_{\bar{f}} = \mathcal{E}_f\}$ .*

Le groupe  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  étant discret, la proposition précédente permet de déduire que la transformation  $\varphi$  s'obtient sans intégration. En effet, si  $\varphi$  dépendait d'une constante arbitraire alors, d'après la proposition précédente, le groupe  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  serait de dimension non nulle, contredisant ainsi le fait qu'il soit discret.

Dans le cas général, c'est à dire quand  $\Phi \subset \text{Diff}^{\text{loc}}(M)$ ,  $\mathcal{S}_f$  et  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  sont deux pseudo-groupes de Lie qui ont la même dimension. En revanche la nullité de  $\dim(\mathcal{S}_{\bar{f}})$  n'implique pas forcément  $\text{card}(\mathcal{S}_f) = \text{card}(\mathcal{S}_{\bar{f}})$ .

**Exemple 5.1** *Considérons les transformations de la forme*

$$(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y)), \quad \eta_y \neq 0. \quad (5.1)$$

Les deux équations  $\bar{y}'' = 6\bar{y}^2 + \bar{x}$  et  $y'' = \frac{6y^4 + x - 2y'^2}{2y}$  sont équivalentes par la transformation  $(x, y) \rightarrow (\bar{x} = x, \bar{y} = y^2)$ . Leurs pseudo-groupes de symétries, de la forme (5.1), sont respectivement donnés par

$$\bar{X} = \bar{x}, \bar{Y} = \bar{y} \text{ et } Y^2 = y^2, X = x.$$

Ils sont bien de la même dimension mais de cardinalité différente.

Remarquons que le changement de variables n'est pas bi-rationnel conséquence du fait que le groupe de symétrie de l'équation  $y'' = \frac{6y^4 + x - 2y'^2}{2y}$  est non réduit à l'identité.

Cependant, même dans ce cas général, la transformation  $\varphi$  s'obtient sans intégrer d'équations différentielles. Ceci découle du théorème 2.4 page 56.

## 5.2 La transformation $\varphi$ se calcule en fonction des invariants

À partir du problème d'équivalence  $(\mathcal{E}_f, \Phi)$  on sait construire, voir chapitre 3, une famille de  $G$ -structures  $P_f$  sur  $M$  tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_f & \longleftarrow & P_f \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{E}_{\bar{f}} & \longleftarrow & P_{\bar{f}} \end{array}$$

Puisque le pseudo-groupe  $\text{Aut}^{\text{loc}}(P_f)$  est de dimension finie, la famille de G-structures  $P_f$  se prolonge en une famille de  $\{e\}$ -structures, définies sur une variété  $\tilde{M}$  de coordonnées locales  $(x, a)$  où  $a = (a_1, \dots, a_r)$  et  $r \in \mathbb{N}$ . La méthode d'équivalence produit en sortie un certain nombre d'invariants fondamentaux et exactement  $m + r$  dérivations invariants. Ils engendrent l'algèbre différentielle des invariants.

**Lemme 5.1** *L'invariant spécialisé  $I_{\bar{f}} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{K}$  est une fonction algébrique.*

DÉMONSTRATION. Elle découle des hypothèses  $(\mathcal{H})$  et du fait que dans la méthode de Cartan, les invariants s'obtiennent par dérivation. CQFD

La proposition 3.3 page 63 montre que la diffiété  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  admet  $m + r$  invariants fonctionnellement indépendants<sup>1</sup>. Ceci est équivalent à dire (après avoir post-normaliser les paramètres  $a_1, \dots, a_r$ ) que la diffiété  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  admet  $m$  invariants  $\left\{ I_{\bar{f}}^1 \right\}_{1 \leq i \leq m}$  fonctionnellement indépendants, définis maintenant sur  $M$ .

Le changement de variables  $\varphi : x \rightarrow \bar{x}$ , qui réalise l'équivalence entre les deux diffiétés  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ , vérifie le système d'équations algébriques

$$\left( I_{\bar{f}}^1(\bar{x}) - I_f^1(x) = 0, \dots, I_{\bar{f}}^m(\bar{x}) - I_f^m(x) = 0 \right).$$

Ce dernier est vu comme un système d'équations défini sur l'anneau de polynômes  $\mathbb{Q}[\bar{x}, I^1, \dots, I^m]$

$$\left( I_{\bar{f}}^1(\bar{x}) - I^1 = 0, \dots, I_{\bar{f}}^m(\bar{x}) - I^m = 0 \right). \quad (5.2)$$

**Lemme 5.2** *Le système (5.2) définit un ensemble caractéristique quasi-linéaire pour le classement d'élimination  $I^1 \succ \dots \succ I^m \succ \bar{x}$ . L'idéal algébrique associé est premier.*

Le fait que les invariants  $I_{\bar{f}}^1, \dots, I_{\bar{f}}^m$  soient algébriquement indépendants implique que le degré générique en  $\bar{x}$  du système (5.2) est fini. Ce degré s'obtient facilement en calculant pour ce système un ensemble caractéristique  $C$  pour le classement d'élimination  $\bar{x} \succ I^1 \succ \dots \succ I^m$ . Le cas le plus simple se produit lorsque le degré de l'ensemble caractéristique  $C$  est égal à un. Dans ce cas, un tel ensemble définit une transformation rationnelle.

**Proposition 5.2** *Lorsque le degré de l'ensemble caractéristique  $C$  est égal à un, le changement de variables  $\varphi$  est la transformation rationnelle définie par  $C$ . De plus, le pseudo-groupe  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  est réduit à l'identité.*

### 5.2.1 Illustration

Appliquons ce que nous venons de voir sur le problème d'équivalence des équations du 2<sup>e</sup> ordre  $y'' = f(x, y, y')$  pour les transformations  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  de la forme

$$(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y)), \quad \eta_y \neq 0.$$

Rappelons que la méthode de Cartan nous a fourni une famille de  $\{e\}$ -structures définies sur la variété de coordonnées locales  $(x, y, y' = p, a)$  avec

<sup>1</sup>On peut dire algébriquement indépendants.

(1) les invariants fondamentaux

$$I_1 = -\frac{1}{4}(f_p)^2 - f_y + \frac{1}{2}D_x f_p, \quad I_2 = \frac{f_{ppp}}{2a^2}, \quad I_3 = \frac{f_{yp} - D_x f_{pp}}{2a}, \quad (5.3)$$

(2) et les dérivations invariantes

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial p}, & X_2 &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{f_p}{a} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{2} f_{pp} \frac{\partial}{\partial a}, \\ X_3 &= D_x - \frac{1}{2} f_p a \frac{\partial}{\partial a}, & X_4 &= a \frac{\partial}{\partial a}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

où  $D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + f(x, y, p) \frac{\partial}{\partial p}$  désigne le champ de Cartan.

**Exemple 5.2 (PI)** On sait que le pseudo-groupe de symétries  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  de la forme

$$(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y)), \quad (\eta_y \neq 0), \quad (5.5)$$

de la première équation de Painlevé PI

$$\mathcal{E}_{\bar{f}} : \bar{y}'' = 6\bar{y}^2 + \bar{x},$$

est réduit à l'identité (voir proposition 4.7 page 89). On veut à présent calculer la forme nécessaire du changement de variables de la forme (5.5) associée à l'équation de Painlevé PI. En d'autres termes, on veut calculer le changement de variables de la forme (5.5) qui ramène l'équation générique du 2<sup>e</sup> ordre  $\mathcal{E}_f : y'' = f(x, y, y')$  à l'équation de Painlevé PI.

Le fait que le pseudo-groupe de symétries de l'équation de Painlevé soit discret implique que cette dernière admet trois invariants fonctionnellement indépendants définis sur la variété  $M = \{(x, y, p = y') \in \mathbb{C}^3\}$ . De tels invariants sont obtenus en spécialisant les invariants  $I_1$ ,  $I_{1;3}$  et  $I_{1;33}$  (obtenus à partir des données (5.3) et (5.4)) sur l'équation de Painlevé. On trouve

$$\bar{I}_1 = 12\bar{y}, \quad \bar{I}_{1;3} = -12\bar{p}, \quad \bar{I}_{1;33} = -72\bar{y}^2 - 12\bar{x}.$$

Maintenant, la transformation  $\varphi : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ , qui réalise l'équivalence entre l'équation  $\mathcal{E}_f$  et la première équation de Painlevé, satisfait nécessairement

$$12\bar{y} = I_1, \quad -12\bar{p} = I_{1;3}, \quad 72\bar{y}^2 - 12\bar{x} = I_{1;33}.$$

Ce qui nous permet d'obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = -\frac{I_1^2}{24} - \frac{I_{1;33}}{12}, \\ \bar{y} = -\frac{I_1}{12}, \\ \bar{p} = -\frac{I_{1;3}}{12}. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

C'est une transformation rationnelle, conséquence du fait que le pseudo-groupe de symétries de l'équation de Painlevé est réduit à l'identité.

En conclusion, une équation différentielle du 2<sup>e</sup> ordre  $y'' = f(x, y, y')$  est équivalente à la première équation de Painlevé  $y'' = 6y^2 + x$  par une transformation  $\varphi$  de la forme  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$  où  $\eta_y \neq 0$  si et seulement si (la première prolongation de)  $\varphi$  est donnée par (5.6).

**Remarque 5.1** Le changement de variables (5.6) a été déjà calculé au chapitre 2. Il est donné par les deux premières équations du système (2.12) page 49. On constate que le calcul du changement de variables en fonction des invariants permet de compresser, de façon significative, la taille des formules.

**Remarque 5.2** Contrairement à la méthode présentée au chapitre 2, nous avons pu calculer le changement de variables sans être obligé à calculer les conditions pourtant sur  $f$  pour que ce changement de variables existe.

Maintenant, si on veut calculer ces conditions (ou plus exactement la variété classifiante associée à l'équation PI) il suffit d'écrire que les invariants "fondamentaux"  $I_2$  et  $I_3$ , page 98, s'annulent (puisque la spécialisation de ces invariants sur la première équation de Painlevé donne deux fonctions identiquement nulles) et d'exprimer le fait que  $\bar{x} - x$  est une constante, c'est à dire

$$X_i(\bar{x} - x) = 0, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (5.7)$$

où  $\bar{x}$  est défini par (5.6) et les  $X_i$  sont les dérivations invariantes page 98. Après tout calcul fait, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} I_2 = I_3 & = 0, \\ X_1 X_3^2 I_1 & = 0, \\ I_1 X_2 I_1 + X_2 X_3^2 I_1 & = 0, \\ I_1 X_3 I_1 + X_3^3 I_1 - 1 & = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Ce sont les mêmes conditions d'équivalence données par les cinq dernières équations du système système (2.12) page 49.

Terminons cette section par deux autres exemples.

**Exemple 5.3** On veut calculer la forme nécessaire du changement de variables  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$  de la forme

$$(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y)), \quad (\eta_y \neq 0), \quad (5.9)$$

pour l'équation différentielle suivante

$$\bar{y}'' + 5\bar{y}' + 6\bar{y}^2 + 6\bar{y} - \bar{x} = 0. \quad (5.10)$$

On montre, par la méthode de Lie, que son pseudo-groupe de symétrie de la forme (5.9) est de dimension nulle. Cette équation admet donc trois invariants fonctionnellement indépendants définis sur la variété  $M = \{(x, y, p = y') \in \mathbb{C}^3\}$

$$\bar{I}_1 = -\frac{1}{4} + 12\bar{y}, \quad \bar{I}_{1;3} = 12\bar{p}, \quad \bar{I}_{1;33} = 12\bar{x} - 60\bar{p} - 72\bar{y}^2 - 72\bar{y}.$$

De la même façon que l'exemple précédant, on écrit l'égalité des invariants et on résout par la rapport aux variables  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  et  $\bar{p}$ . On obtient la forme nécessaire du changement de variables

$$\begin{cases} \bar{p} = \frac{1}{12}I_{1;3}, \\ \bar{y} = \frac{1}{12}I_1 + \frac{1}{48}, \\ \bar{x} = \frac{49}{384} + \frac{25}{48}I_1 + \frac{1}{24}I_1^2 + \frac{1}{12}I_{1;33} + \frac{5}{12}I_{1;3}. \end{cases}$$

On en déduit que le pseudo-groupe de symétries de la forme (5.9) de l'équation (5.10) est réduit à l'identité.

**Exemple 5.4** Considérons l'équation suivante [RWW93, Hyd98a]

$$\bar{y}'' = \frac{\bar{y}'}{\bar{x}} + \frac{4\bar{y}^2}{\bar{x}^3}$$

dont le pseudo-groupe de symétries de la forme (5.9) est de dimension nulle. Elle admet donc trois invariants fonctionnellement indépendants définis sur  $M = \{(x, y, p = y')\}$ , ou ce qui est équivalent, quatre invariants fonctionnellement indépendants qui peuvent dépendre du paramètre  $\bar{a}$

$$\bar{I}_{1;23} = -20\frac{1}{\bar{a}\bar{x}^4}, \quad \bar{I}_{1;31} = 8\frac{1}{\bar{a}\bar{x}^3}, \quad \bar{I}_1 = \frac{3}{4\bar{x}^2} + 8\frac{\bar{y}}{\bar{x}^3}, \quad \bar{I}_{1;3} = \frac{-3\bar{x} - 48\bar{y} + 16\bar{p}\bar{x}}{2\bar{x}^4}.$$

On normalise le paramètre  $\bar{a}$  en posant  $\bar{I}_{1;23} = -20$  (et  $I_{1;23} = -20$  pour toute équation équivalente) ce qui nous permet d'obtenir trois invariants fonctionnellement indépendants sur  $M$ . On procède ensuite comme dans les exemples précédents et on obtient la forme nécessaire du changement de variables

$$\begin{cases} \bar{p} = -\frac{3}{32} + \frac{3}{512}I_{1;31}^2I_1 + \frac{1}{4096}I_{1;3}I_{1;31}^3, \\ \bar{y} = -\frac{3}{256}I_{1;31} + \frac{1}{4096}I_{1;31}^3, \\ \bar{x} = \frac{1}{8}I_{1;31}, \end{cases}$$

avec  $I_{1;23} = -20$ , qui permet de normaliser le paramètre  $a$ .

## 5.3 Abaissement de degré

Dans la section précédente nous avons vu que le changement de variables  $\varphi : x \rightarrow \bar{x}$ , qui envoie la diffiété générique  $\mathcal{E}_f$  sur la diffiété cible  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ , satisfait le système d'équations algébriques

$$\left( I_{\bar{f}}^1(\bar{x}) - I_f^1 = 0, \dots, I_{\bar{f}}^m(\bar{x}) - I_f^m = 0 \right),$$

ou encore

$$\left( I_{\bar{f}}^1(\bar{x}) - I^1 = 0, \dots, I_{\bar{f}}^m(\bar{x}) - I^m = 0 \right), \quad (5.11)$$

faisant apparaître les invariants fonctionnellement indépendants  $I_{\bar{f}}^1, \dots, I_{\bar{f}}^m$ . Si  $C \subset \mathbb{Q}[\bar{x}, I^1, \dots, I^m]$  désigne l'ensemble caractéristique associé au système (5.11) pour le classement  $\bar{x} \succ I^1 \succ \dots \succ I^m$ , alors la proposition 5.2 nous dit que lorsque le degré en  $\bar{x}$  de cet ensemble est égal à un, le changement de variables  $\varphi$  est la transformation rationnelle donnée par  $C$ . De plus, le pseudo-groupe de symétries  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$  est nécessairement réduit à l'identité.

Dans cette section nous allons traiter le cas où le degré en  $\bar{x}$  de l'ensemble caractéristique  $C$  est supérieur à un. L'idée consiste à comparer ce degré avec celui de la transformation  $\varphi$ . Rappelons que, sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , le théorème 2.5 page 57 nous dit que le degré en  $\bar{x}$  de la transformation  $\varphi$  est égal au cardinal du pseudo-groupe de symétries  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$ . Ce cardinal se calcule suivant la méthode présentée au chapitre précédent.

On distingue deux cas : (1) le degré de l'ensemble caractéristique  $C$  est égal au cardinal de  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$ , (2) le degré de l'ensemble  $C$  est strictement supérieur au cardinal de  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$ . La proposition suivante répond au premier cas

**Proposition 5.3** *Le changement de variables  $\varphi$  est donnée par  $C$  si et seulement si le degré  $C$  est égal à  $\text{card}(\mathcal{S}_{\bar{f}})$ .*

Voyons maintenant le cas général, c'est à dire quand  $\deg(C) > \text{card}(\mathcal{S}_{\bar{f}})$ . Cette situation se produit lorsque les invariants choisis  $I_{\bar{f}}^1, \dots, I_{\bar{f}}^m$  ne sont pas "suffisamment petits" en ce sens qu'il existe  $m$  autres invariants fonctionnellement indépendants tels que le degré de l'ensemble  $C$  associé est égal à  $\text{card}(\mathcal{S}_{\bar{f}})$ .

**Exemple 5.5** *Considérons l'équation suivante ([Kam44])*

$$\bar{y}'' = \bar{y}^3 + \bar{x}\bar{y}$$

dont le pseudo-groupe de symétries de la forme  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$  avec  $\eta_y \neq 0$ , est donné par

$$\bar{Y}^2 = \bar{y}^2, \bar{X} = \bar{x}.$$

Il est donc de cardinalité égale à deux.

D'autre part, on peut vérifier que les invariants  $I_1, I_{1;13}$  et  $I_{1;133}$ , spécialisés sur l'équation précédente, sont fonctionnellement indépendants. L'ensemble caractéristique  $C$  associé est dans ce cas

$$\begin{cases} \bar{p} = -\frac{(4\bar{x}^2 + 2I_1\bar{x} - 3I_{1;33} - 2I_1^2)\bar{y}}{3(I_{1;3} + 1)}, \\ \bar{y}^2 = -\frac{1}{3}\bar{x} - \frac{1}{3}I_1, \\ \bar{x}^3 = -\frac{3}{2}I_1\bar{x}^2 + \frac{3}{4}I_{1;33}\bar{x} - \frac{3}{4}I_{1;3} - \frac{3}{8}I_{1;3}^2 + \frac{3}{4}I_{1;33}I_1 + \frac{1}{2}I_1^3 - \frac{3}{8}. \end{cases}$$

Le degré de cet ensemble est égal à 6 donc différent de la cardinalité du pseudo-groupe de symétries.



Par contre, si on prend les invariants (de poids zéro)  $K_1 := \frac{I_{1;233}}{I_{1;31}}$ ,  $K_2 := \frac{I_{1;234}}{I_{1;31}}$  et  $K_3 := \frac{I_{1;231}}{I_{1;31}^2}$ , alors l'ensemble caractéristique  $C$  est

$$\begin{cases} \bar{p} &= -K_1 \bar{y}, \\ \bar{y}^2 &= \frac{1}{6} K_3, \\ \bar{x} &= -\frac{1}{6} K_3 + K_1 \end{cases}$$

donc de degré égal à deux. La forme nécessaire nécessaire du changement de variables associé à l'équation considérée est alors donnée par cet ensemble.

En réalité nous n'avons pas besoin de calculer ces nouveaux invariants. En effet, comme nous allons le voir sur les exemples suivants, les équations de définition du pseudo-groupe de  $\Phi$  nous permettent d'obtenir le degré minimal et de retrouver ainsi le changement de variables (parmi toutes les solutions du système (5.11)), sans parcourir l'arbre des invariants.

En résumé, sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , le changement de variable  $\varphi$  qui réalise l'équivalence entre les deux diffiétés  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ , s'obtient de la façon suivante

---

#### ChgtCoords

---

Entrées:  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  et  $\Phi$  tel que  $\dim(\mathcal{S}_{\bar{f}}) = 0$

Sortie:  $\bar{x} = \varphi(x)$  la forme nécessaire du changement de variables associée à  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$

1. Trouvez  $m$  invariants fonctionnellement indépendants  $(I_{\bar{f}}^1, \dots, I_{\bar{f}}^m)$  définis sur  $M$ .
  2. Calculer un ensemble car.  $C$  du système algébrique (5.11).
  3. Si  $\deg(C) = 1$  alors Retourne  $C$ .
  4. Calculer  $\mathcal{S}_{\bar{f}}$ .
  5. TANT QUE  $\deg(C) \neq \deg(\mathcal{S}_{\bar{f}})$  FAIRE  
Réduire le degré de  $C$ .  
FAIT
  6. Retourne  $C$ .
- 

**Exemple 5.6 ( L'équation d'Emden-Fowler)** *Le but est de calculer la transformation  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$ , de la forme  $(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y))$ , où  $\eta_y \neq 0$ , qui envoie l'équation du 2<sup>e</sup> ordre  $y'' = f(x, y, y')$  sur l'équation d'Emden-Fowler*

$$\bar{y}'' = \frac{1}{\bar{x}\bar{y}^2}.$$

*La proposition 4.8 page 90 montre que le groupe de symétries de cette équation est un groupe discret. Il est représenté par l'ensemble caractéristique*

$$\bar{y}^3 = y^3, \quad \bar{x} = x. \tag{5.12}$$

Le fait qu'un tel pseudo-groupe soit discret implique que l'équation d'Emden-Fowler admet trois invariants fonctionnellement indépendants. On peut prendre les invariants suivants, construits à partir des données (5.3) et (5.4)

$$\bar{I}_1 = \frac{2}{\bar{x}\bar{y}^3}, \quad \bar{I}_{1;3} = -2\frac{\bar{y} + 3\bar{p}\bar{x}}{\bar{x}^2\bar{y}^4}, \quad \bar{I}_{1;33} = 2\frac{3\bar{x} + 12\bar{p}^2\bar{x}^2\bar{y} + 6\bar{p}\bar{x}\bar{y}^2 + 2\bar{y}^3}{\bar{x}^3\bar{y}^6}.$$

On construit le système (5.11)

$$I_1 = \frac{2}{\bar{x}\bar{y}^3}, \quad I_{1;3} = -2\frac{\bar{y} + 3\bar{p}\bar{x}}{\bar{x}^2\bar{y}^4}, \quad I_{1;33} = 2\frac{3\bar{x} + 12\bar{p}^2\bar{x}^2\bar{y} + 6\bar{p}\bar{x}\bar{y}^2 + 2\bar{y}^3}{\bar{x}^3\bar{y}^6}.$$

Vu comme un système d'équations algébriques défini sur l'anneau  $\mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, I_1, I_{1;3}, I_{1;33}]$ , le système précédent peut être simplifier par un calcul d'ensemble caractéristique pour le classement

$$\bar{p} \succ \bar{y} \succ \bar{x} \succ I_1 \succ I_{1;3} \succ I_{1;33}.$$

Le cas générique correspond à l'ensemble caractéristique suivant

$$\begin{cases} \bar{p} &= \left( \frac{3}{8}I_1 - \frac{1}{4}\frac{I_{1;33}}{I_1} + \frac{1}{3}\frac{I_{1;3}^2}{I_1^2} \right) \bar{x}\bar{y} - \frac{1}{6}\frac{I_{1;3}}{I_1}\bar{y}, \\ \bar{y}^3 &= \left( -\frac{9}{4} - 2\frac{I_{1;3}^2}{I_1^3} + \frac{3}{2}\frac{I_{1;33}}{I_1^2} \right) \bar{x} - \frac{I_{1;3}}{I_1^2}, \\ \bar{x}^2 &= 4 \left( \frac{I_{1;3}I_1}{-9I_1^3 - 8I_{1;3}^2 + 6I_{1;33}I_1} \right) \bar{x} + 8\frac{I_1^2}{-9I_1^3 - 8I_{1;3}^2 + 6I_{1;33}I_1}. \end{cases} \quad (5.13)$$

En comparant les degrés des variables  $\bar{p}, \bar{y}$  et  $\bar{x}$ , dans les deux ensembles caractéristiques (5.12) et (5.13), on en déduit que, contrairement à  $\bar{y}$ , le degré de  $\bar{x}$  dans la troisième équation de (5.13) doit être égal à un. Pour cela, écrivons que le changement de variables vérifie les équations de définition du pseudo-groupe

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \neq 0.$$

Intéressons nous à la troisième équation qui s'écrit sous la forme

$$X_1(\bar{x}) = 0, \quad (5.14)$$

où  $X_1 = \frac{\partial}{\partial p}$  est la dérivation invariante. Pour alléger, écrivons la troisième équation de l'ensemble caractéristique (5.13) sous la forme

$$\bar{x}^2 = A \bar{x} + B.$$

Dérivons les deux membres de cette équation par rapport à  $X_1$ . En tenant compte de (5.14), on obtient

$$A_{;1}\bar{x} + B_{;1} = 0$$

où  $F_{;1} = X_1(F)$ . Le coefficient de  $\bar{x}$  dans cette équation, qui est invariant, ne peut s'annuler. En effet, le fait qu'il ne soit pas nul sur l'équation d'Emden-Fowler implique qu'il ne peut pas l'être sur toute équation équivalente. On peut alors écrire

$$\bar{x} = -\frac{B_{;1}}{A_{;1}},$$

ou plus explicitement

$$\bar{x} = -2 \frac{KI_{1;1} + I_1 K_{;1}}{KI_{1;31} + I_{1;3} K_{;1}} \quad \text{avec } K = \frac{I_1}{-9I_1^3 - 8I_{1;3}^2 + 6I_{1;33}I_1}, \quad (5.15)$$

qui est la formule minimale cherchée pour  $\bar{x}$ . La forme nécessaire du changement de variables est alors donnée par les deux premières équations de (5.13) et l'équation (5.15).

Remarquons qu'une dérivation supplémentaire de l'équation (5.15) par rapport à  $X_1$  annulera le terme à gauche. Ce qui nous donne une condition nécessaire d'équivalence i.e. une équation de la variété classifiante.

**Exemple 5.7 (L'équation de Yermakov)** Considérons l'équation de Yermakov

$$\bar{y}'' = \bar{x}\bar{y} + \frac{1}{\bar{y}^3},$$

que nous avons déjà rencontrée dans le chapitre précédant page 92. Nous voulons calculer le changement de variables  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$ , de la forme ( $\eta_y \neq 0$ )

$$(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y)),$$

qui ramène une équation différentielle du second ordre  $y'' = f(x, y, y')$  à l'équation de Yermakov. Rappelons que le groupe de symétries de cette équation est donné par

$$\bar{p} = \frac{\bar{y}}{y}p, \quad \bar{y}^4 = y^4, \quad \bar{x} = x.$$

Lorsqu'on spécialise les invariants  $I_1$ ,  $I_{1;3}$  et  $I_{1;33}$ , sur l'équation de Yermakov on obtient trois invariants fonctionnellement indépendants  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_{1;3}$  et  $\bar{I}_{1;33}$ . On pose l'égalité des invariants

$$\bar{I}_1 = I_1, \quad \bar{I}_{1;3} = I_{1;3} \quad \bar{I}_{1;33} = I_{1;33}.$$

Ce système se simplifie, à l'aide de l'algorithme ROSENFELD-GRÖBNER, en

$$\begin{cases} \bar{p} = -\left(\frac{16}{15(I_{1;3} - 1)}\right) \bar{x}^2 \bar{y} + \left(\frac{4}{3} \frac{I_1}{I_{1;3} - 1}\right) \bar{x} \bar{y} - \left(\frac{1}{15} \frac{(4I_1^2 + 3I_{1;33})}{I_{1;3} - 1}\right) \bar{y}, \\ \bar{y}^4 = -\left(\frac{64}{5 + 5I_{1;3}^2 - 10I_{1;3}}\right) \bar{x}^2 + \left(\frac{16I_1}{1 + I_{1;3}^2 - 2I_{1;3}}\right) \bar{x} - \frac{16I_1^2 + 12I_{1;33}}{2 + 5I_{1;3}^2 - 10I_{1;3}}, \\ \bar{x}^3 = \left(\frac{9I_1}{4}\right) \bar{x}^2 + \left(-\frac{3}{2}I_1^2 - \frac{3}{16}I_{1;33}\right) \bar{x} - \frac{15}{64}I_{1;3}^2 + \frac{3}{16}I_{1;33}I_1 + \frac{15}{32}I_{1;3} + \frac{1}{4}I_1^3 - \frac{15}{64} \end{cases}$$

On voit que les degrés de  $\bar{y}$  dans cet ensemble caractéristique et dans le groupe de symétries sont égaux. Par contre, le degré de  $\bar{x}$  doit être réduit à un. Pour cela, on dérive la dernière équation par rapport à la dérivation invariante  $X_1$ , sachant que

$$X_1(\bar{x}) = 0.$$

Ce qui donne un polynôme de degré deux pour la variable  $\bar{x}$ . On divise, ensuite, par le coefficient de  $\bar{x}^2$  (qui est non nul) et on dérive encore une fois par rapport à  $X_1$ .

## 5.4 Équivalence avec une famille d'équations

Dans cette section on calculera le changement de variables qui ramène la diffiété  $\mathcal{E}_f$  à une diffiété appartenant à une (sous) famille de diffiétés connues  $\mathcal{E}_\alpha$  paramétrées par un certain nombre de paramètres  $\alpha \in \mathbb{K}^n$ . Le changement de variables doit alors fixer les valeurs des paramètres en fonctions des invariants.

**Exemple 5.8 (La famille d'équations de Painlevé PII)** *Le but ici est de déterminer le changement de variables  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$ , de la forme*

$$(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y)), \quad (\eta_y \neq 0),$$

*qui envoie l'équation générique du second ordre  $y'' = f(x, y, y')$  sur une équation de la famille d'équations de Painlevé II*

$$\bar{y}'' = 2\bar{y}^3 + \bar{x}\bar{y} + \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} \in \mathbb{C}^*.$$

*Dans ce cas, nous devons calculer le paramètre  $\bar{\alpha}$  en fonction des invariants.*

*Dans le chapitre précédent nous avons montré que le groupe de symétries de cette famille, est égal au groupe discret*

$$\bar{p} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} p, \quad \bar{y} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} y, \quad \bar{x} = x, \quad \bar{\alpha}^2 = \alpha^2.$$

*Il existe donc quatre invariants fonctionnellement indépendants définis sur la variété élargie de coordonnées locales  $(x, y, p, \alpha)$*

$$\bar{I}_1 = -6\bar{y}^2 - \bar{x}, \quad \bar{I}_{1;3} = -1 - 12\bar{p}\bar{y}, \quad \bar{I}_{1;33} = -12\bar{p}^2 - 24\bar{y}^4 - 12\bar{y}^2\bar{x} - 12\alpha\bar{y}, \quad \frac{\bar{I}_{1;2}}{\bar{I}_{1;32}} = \frac{\bar{p}}{\bar{y}}.$$

*Toute équation du 2<sup>e</sup> ordre  $y'' = f(x, y, y')$  équivalente à une équation de la famille d'équations de Painlevé PII vérifie nécessairement (on pose  $K := \frac{I_{1;2}}{I_{1;32}}$ )*

$$\bar{I}_1 = I_1, \quad \bar{I}_{1;3} = I_{1;3}, \quad \bar{I}_{1;33} = I_{1;33}, \quad \bar{K} = K.$$

*L'application de ROSENFELD-GRÖBNER au système précédent, vu comme un système algébrique défini sur l'anneau de polynômes  $\mathbb{Q}[\bar{p}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{\alpha}, I_1, I_{1;3}, I_{1;33}, K]$ , pour le classement*

$$\bar{p} \succ \bar{y} \succ \bar{x} \succ \bar{\alpha} \succ I_1 \succ I_{1;3} \succ I_{1;33} \succ K,$$

*permet d'obtenir un ensemble caractéristique composée de deux parties. D'abord celle qui donne les variables  $\bar{x}, \bar{y}$  et  $\bar{p}$*

$$\begin{cases} \bar{p} &= -3 \frac{K^2 (I_{1;3} - 1)}{-1 - 3K^2 I_{1;33} - I_{1;3}^2 + 2I_{1;3} + 3K^3 I_{1;3} - 3K^3 + 3I_{1;3} K I_1 - 3K I_1} \bar{\alpha}, \\ \bar{y} &= \left( \frac{9K (I_{1;3} - 1)}{-1 - 3K^2 I_{1;33} - I_{1;3}^2 + 2I_{1;3} + 3K^3 I_{1;3} - 3K^3 + 3I_{1;3} K I_1 - 3K I_1} \right) \bar{\alpha}, \\ \bar{x} &= \frac{1}{2} \frac{2K I_1 + 1 - I_{1;3}}{K}. \end{cases}$$

Ensuite celle qui fixe le paramètre  $\bar{\alpha}$  en fonction des invariants

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}^2 = & \frac{1}{108} \frac{(9 + 9I_{1;3}^2 - 18I_{1;3}) K^3}{I_{1;3} - 1} + \frac{1}{108} \frac{(-18I_{1;33}I_{1;3} + 18I_{1;33}) K^2}{I_{1;3} - 1} \\ & + \frac{1}{108} \frac{(18I_1 + 9I_{1;33}^2 + 18I_{1;3}^2I_1 - 36I_{1;3}I_1) K}{I_{1;3} - 1} \\ & + \frac{1}{108} \frac{6 - 18I_{1;3}I_1I_{1;33} + 18I_{1;3}^2 - 6I_{1;3}^3 - 18I_{1;3} + 18I_1I_{1;33}}{I_{1;3} - 1} \\ & + \frac{1}{108} \frac{6I_{1;33} - 12I_{1;33}I_{1;3} + 9I_{1;3}^2I_1^2 + 6I_{1;3}^2I_{1;33} + 9I_1^2 - 18I_{1;3}I_1^2}{(I_{1;3} - 1) K} \\ & + \frac{1}{108} \frac{-18I_{1;3}I_1 + 18I_{1;3}^2I_1 - 6I_{1;3}^3I_1 + 6I_1}{(I_{1;3} - 1) K^2} + \frac{1}{108} \frac{1 - 4I_{1;3}^3 - 4I_{1;3} + 6I_{1;3}^2 + I_{1;3}^4}{K^3 (I_{1;3} - 1)}.\end{aligned}$$

On constate que le degré de cette transformation est égale à la cardinalité du pseudo-groupe de symétries de la famille d'équations de Painlevé. Elle définit donc la forme nécessaire du changement de variables cherchée.

**Exemple 5.9 (La famille d'équations de Lagerstrom)** Nous voulons déterminer le changement de variables  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$ , de la forme ( $\eta_y \neq 0$ )

$$(x, y) \rightarrow (x + C, \eta(x, y)),$$

qui ramène l'équation générique du second ordre à une équation de la famille d'équations de Lagerstrom [RS75]

$$\bar{y}'' + \frac{\bar{k}}{\bar{x}} + \bar{y}\bar{y}' = 0, \quad \bar{k} \in \mathbb{C}^*.$$

L'invariant fondamental  $I_2$ , évalué sur une équation quelconque de la famille, est égal à  $\frac{1}{2\bar{a}}$ . Par conséquent, il peut être fixé à  $\frac{1}{2}$ . Ce qui permet ainsi de normaliser le paramètre  $\bar{a}$  et d'obtenir les invariants fonctionnellement indépendants définis sur  $M = \{x, y, p = y'\}$

$$\begin{aligned}\bar{I}_{1;3} &= \frac{2\bar{k} - \bar{k}\bar{y}\bar{x} - \bar{k}^2 + 2\bar{p}\bar{x}^2\bar{k} + 2\bar{p}\bar{x}^3\bar{y}}{2\bar{x}^3}, \\ \bar{I}_{1;31} &= \frac{\bar{k} + \bar{y}\bar{x}}{\bar{x}}, \\ \bar{I}_{1;32} &= \frac{-\bar{k} + 2\bar{p}\bar{x}^2 - (\bar{k} + \bar{y}\bar{x})\bar{k} - (\bar{k} + \bar{y}\bar{x})\bar{y}\bar{x}}{2\bar{x}^2}, \\ \bar{I}_{2;33} &= -\frac{-2\bar{k} + 2\bar{p}\bar{x}^2 - (\bar{k} + \bar{y}\bar{x})\bar{k} - (\bar{k} + \bar{y}\bar{x})\bar{y}\bar{x}}{8\bar{x}^2}.\end{aligned}$$

On pose ensuite l'égalité des invariants et on calcule pour le système obtenu un ensemble caractéristique pour le classement  $\bar{p} \succ \bar{y} \succ \bar{x} \succ \bar{k} \succ I_{1;3} \succ I_{1;31} \succ I_{1;32} \succ I_{2;32}$ . On

obtient ainsi la forme nécessaire du changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p} = -2I_{1;32} - 4I_{2;33} + \frac{1}{2}I_{1;31}^2, \\ \bar{y} = \frac{8I_{1;32}^2 - 2I_{1;32}I_{1;31}^2 + 64I_{1;32}I_{2;33} + 2I_{1;31}I_{1;3} + 128I_{2;33}^2 + I_{1;31}^4}{-2I_{1;3} - I_{1;31}^3 + 2I_{1;31}I_{1;32}}, \\ \bar{x} = 4 \frac{I_{1;32} + 4I_{2;33}}{-2I_{1;3} - I_{1;31}^3 + 2I_{1;31}I_{1;32}}, \\ \bar{k} = -32 \frac{I_{1;32}^3 + 12I_{1;32}^2I_{2;33} + 48I_{1;32}I_{2;33}^2 + 64I_{2;33}^3}{4I_{1;3}^2 + 4I_{1;3}I_{1;31}^3 - 8I_{1;3}I_{1;31}I_{1;32} + I_{1;31}^6 - 4I_{1;31}^4I_{1;32} + 4I_{1;31}^2I_{1;32}^2} \end{array} \right.$$

avec la normalisation  $I_2 = -\frac{1}{2}$ . On déduit que le pseudo-groupe de symétries de la famille d'équations de Lagerstrom est réduit à l'identité.

**Exemple 5.10 (La famille d'équations de Van der Pol)** Considérons la famille d'équations de Van der Pol

$$\bar{y}'' = \bar{\varepsilon}(1 - \bar{y}^2)\bar{y}' - \bar{y}, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{C}, \quad \bar{\varepsilon} \in \mathbb{C}^*.$$

Le pseudo-groupe de symétries de la forme  $(x, y) \rightarrow (\bar{x} + C, \eta(x, y))$  est le groupe à un paramètre  $C$  donné par

$$\bar{p} = \lambda p, \quad \bar{y} = \lambda y, \quad \bar{x} = x + C, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \text{ avec } \lambda^2 = 1.$$

Maintenant, si on se limite aux transformations de la forme  $(x, y) \rightarrow (x, \eta(x, y))$  alors ce groupe est réduit en un groupe discret de degré deux. La famille d'équations de Van der Pol admet donc cinq invariants fonctionnellement indépendants définis sur la variété de coordonnées locales  $(x, y, p = y', \varepsilon, a)$

$$\bar{x} = x, \quad \bar{I}_{1;1} = -\frac{\bar{\varepsilon}\bar{y}}{\bar{a}}, \quad \bar{I}_{1;13} = -\frac{\bar{\varepsilon}(2\bar{p} + (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}\bar{y}^2)\bar{y})}{2\bar{a}}, \quad \bar{I}_{1;22} = \frac{\bar{\varepsilon}(-8\bar{\varepsilon} + 20\bar{\varepsilon}\bar{y}^2)}{4\bar{a}^2}, \quad \bar{I}_{1;142} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{a}^2}.$$

On normalise le paramètre  $\bar{a}$  en posant  $\bar{I}_{1;1} = -1$ . À l'instar des exemples précédents, on obtient l'ensemble caractéristique

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p} = -\frac{\bar{y}(4I_{1;142}I_{1;13} + 3 - I_{1;22})}{4I_{1;142}}, \\ \bar{y}^2 = \frac{-2}{(-5 + I_{1;22})}, \\ \bar{x} = x, \\ \bar{\varepsilon} = -\frac{-5 + I_{1;22}}{2I_{1;142}}, \end{array} \right.$$

dont le degré coïncide avec la cardinalité du pseudo-groupe de symétries de la famille. Par conséquent, la forme nécessaire du changement de variables est donnée par cet ensemble et la normalisation  $I_{1;1} = -1$ .

## 5.5 Deux autres exemples

Dans cette section, on considère le problème d'équivalence des équations du second ordre  $y'' = f(x, y, y')$  pour les transformations fiber-preserving. Il s'agit des transformations  $\varphi \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$ , de la forme  $(\xi_x \eta_y \neq 0)$

$$(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (\xi(x), \eta(x, y)).$$

On veut calculer la forme nécessaire du changement de variables fiber-preserving pour chacune des deux équations de Painlevé PI et PII.

### 5.5.1 Les invariants

Plaçons nous sur la variété  $M$  de coordonnées locales  $(x, y, p = y')$ . Le problème d'équivalence précédent se formule en un problème d'équivalence de  $G$ -structures sur  $M$  [KLS85, KS86, KS87, Olv95].

**Proposition 5.4** *Deux équations différentielles ordinaires du second ordre  $y'' = f(x, y, y')$  et  $y'' = \bar{f}(x, y, y')$  sont équivalentes par une transformation fiber-preserving s'il existe des fonctions  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  de  $M$  dans  $\mathbb{C}$  telles que*

$$\underbrace{\varphi^* \begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p} d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix}}_{\omega_{\bar{f}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}}_{S(a) \in G} \underbrace{\begin{pmatrix} dp - f(x, y, p) dx \\ dy - p dx \\ dx \end{pmatrix}}_{\omega_f}. \quad (5.16)$$

On se ramène donc à l'équivalence des  $G$ -structures  $P_f = (M, G, \theta_f = S(a)\omega_f)$ .

Après une normalisation et une prolongation, la méthode de Cartan fournit une famille de  $\{e\}$ -structures avec les invariants fondamentaux

$$\begin{cases} I_3 = -\frac{f_{ppp}a_4}{2a_1^2}, \\ I_2 = \frac{f_{yp} - D_x f_{pp}}{2a_1 a_4}, \\ I_1 = \frac{(2f_{yy} - D_x f_{yp} - f_{pp}f_y + f_{yp}f_p)a_1 + (-f_{yp} + D_x f_{pp})a_4 a_2}{2a_1^2 a_4^2}. \end{cases}$$

définis sur la variété  $\tilde{M} \rightarrow M$ , de coordonnées locales  $(x, y, p, a_1, a_2, a_4)$ .  $D_x$  désigne le champs de Cartan  $\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + f(x, y, p) \frac{\partial}{\partial p}$ .

Pour les deux équations de Painlevé les deux invariants fondamentaux  $I_2$  et  $I_3$  sont nuls. Sur cette branche de scindage l'application de l'identité fondamentale  $d^2 = 0$  aux équations de structure donne les relations

$$X_2(I_1) = 0, \quad X_4(I_1) = 0, \quad X_5(I_1) + I_1 = 0, \quad X_6(I_1) + 3I_1 = 0.$$

Ces relations montrent que seules les deux dérivations  $X_1$  et  $X_3$  peuvent ramener de nouveaux invariants

$$\begin{cases} X_1 &= \frac{1}{a_1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{a_2 a_4}{a_1^2} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{2} f_{pp} \frac{\partial}{\partial a_1} - \frac{1}{2} \frac{f_{py}}{a_4} \frac{\partial}{\partial a_2}, \\ X_3 &= \frac{1}{a_4} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{p}{a_4} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{f}{a_4} \frac{\partial}{\partial p} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} - \frac{f_y a_1}{a_4^2} \frac{\partial}{\partial a_2} + \frac{2a_2 a_4 + f_p a_1}{a_1} \frac{\partial}{\partial a_4}. \end{cases}$$

Cette observation est très importante puisqu'elle permet de réduire l'espace de recherche des invariants fonctionnellement indépendants.

## L'équation PI

Nous allons calculer le changement de variables fiber-reserving qui envoie l'équation du second ordre  $y'' = f(x, y, y')$  sur la première équation de Painlevé

$$\bar{y}'' = 6\bar{y}^2 + \bar{x}.$$

À l'aide de la méthode de Lie on montre que le pseudo-groupe de symétries fiber-preserving de cette équation est de dimension nulle. Elle admet donc trois invariants fonctionnellement indépendants définis sur  $M$ , ou ce qui est équivalent six invariants fonctionnellement indépendants définis sur  $\tilde{M}$ .

**Lemme 5.3** *La spécialisation des invariants*

$$I_1, I_{1;3}, I_{1;33}, \frac{I_{1;333}}{I_{1;33}}, \frac{I_{1;3333}}{I_{1;33}} - \frac{43}{120} I_{1;33}, \frac{I_{1;33333}}{I_{1;33}} - \frac{5}{4} I_{1;33},$$

sur la première équation de Painlevé donne six invariants fonctionnellement indépendants définis sur  $\tilde{M}$ .

On normalise les paramètres  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$  et  $\bar{a}_4$  en posant

$$\bar{I}_1 = -12, \bar{I}_{1;3} = 0, \frac{\bar{I}_{1;333}}{\bar{I}_{1;33}} = 1$$

Ce qui permet d'obtenir la normalisation suivante

$$\bar{a}_1 = \frac{\bar{y}^2}{\bar{p}^2}, \bar{a}_2 = 0, \bar{a}_4 = \frac{\bar{p}}{\bar{y}}. \quad (5.17)$$

Notons que toute équation du 2<sup>e</sup> ordre  $y'' = f(x, y, y')$  équivalente à la première équation de Painlevé doit satisfaire

$$I_1 = -12, I_{1;3} = 0, \frac{I_{1;333}}{I_{1;33}} = 1, \quad (5.18)$$

normalisant ainsi les paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_4$  en fonction de  $f$  et de ses dérivées. En remplaçant les valeurs (5.17) dans les autres invariants on obtient trois invariants fonctionnellement indépendants, maintenant définis sur  $M$

$$\bar{I}_{1;33} = 720 \frac{\bar{y}^3}{\bar{p}^2}, \frac{\bar{I}_{1;3333}}{\bar{I}_{1;33}} - \frac{43}{120} \bar{I}_{1;33} = \frac{\bar{y}\bar{x}}{\bar{p}^2}, \frac{\bar{I}_{1;33333}}{\bar{I}_{1;33}} - \frac{5}{4} \bar{I}_{1;33} = \frac{\bar{y}^2}{\bar{p}^3}.$$



**Lemme 5.4** *Le pseudo-groupe de symétries fiber-preserving de la première équation de Painlevé est donné par*

$$\{(x, y, p) \rightarrow (\lambda^2 x, \lambda y, \lambda^4 p), \quad \lambda^5 = 1\}$$

DÉMONSTRATION. Une symétrie fiber-preserving de l'équation de Painlevé est une transformation dont la première prolongation  $(x, y, p) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$  vérifie nécessairement l'égalité des invariants

$$\frac{\bar{y}^3}{\bar{p}^2} = \frac{y^3}{p^2}, \quad \frac{\bar{y}\bar{x}}{\bar{p}^2} = \frac{yx}{p^2}, \quad \frac{\bar{y}^2}{\bar{p}^3} = \frac{y^2}{p^3}$$

ou encore

$$\bar{p} = \frac{y}{\bar{y}}p, \quad \bar{y}^5 = y^5, \quad \bar{x} = \frac{\bar{y}^2}{y^2}x.$$

La substitution de ces transformation dans la première équation de Painlevé montre qu'elles sont toutes symétries de cette équation. CQFD

Passons à présent au calcul du changement de variables. Pour cela posons

$$I_{1;33} = \bar{I}_{1;33}, \quad \frac{I_{1;3333}}{I_{1;33}} - \frac{43}{120}I_{1;33} = \frac{\bar{I}_{1;3333}}{\bar{I}_{1;33}} - \frac{43}{120}\bar{I}_{1;33}, \quad \frac{I_{1;33333}}{I_{1;33}} - \frac{5}{4}I_{1;33} = \frac{\bar{I}_{1;33333}}{\bar{I}_{1;33}} - \frac{5}{4}\bar{I}_{1;33}.$$

Ce système algébrique se simplifie par un calcul d'ensemble caractéristique à l'aide de ROSENFELD-GRÖBNER. On obtient

$$\begin{cases} \bar{p} &= 129600 \frac{\bar{y}^4 (5I_{1;33}^2 + 4I_{1;33333})}{I_{1;33}^3} \\ \bar{x} &= -6 \frac{\bar{y}^2 (120I_{1;3333} + 43I_{1;33}^2)}{I_{1;33}^2}, \\ \bar{y}^5 &= -\frac{1}{23328000} \frac{I_{1;33}^5}{25I_{1;33}^4 + 40I_{1;33}^2 I_{1;3333} + 16I_{1;3333}^2}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Dans ces formules les invariants sont normalisés à l'aide de la normalisation (5.18), ils sont donc des invariants sur la variété  $M$ .

**Proposition 5.5** *Une équation différentielle du 2<sup>e</sup> ordre  $y'' = f(x, y, y')$  est équivalente à la première équation de Painlevé par une transformation fiber-preserving  $\varphi$  si et seulement si  $\varphi$  est donnée par le système (5.19) et la normalisation (5.18).*

DÉMONSTRATION. Le lemme précédent montre que les degrés dans l'ensemble caractéristique sont minimaux. CQFD

### 5.5.2 La famille d'équations PII

Calculons à présent le changement de variables fiber-preserving qui ramène l'équation générique 2<sup>e</sup> ordre à une équation de la famille d'équation de Painlevé PII

$$\bar{y}'' = 2\bar{y}^3 + \bar{y}\bar{x} + \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} \in \mathbb{C}^*. \quad (5.20)$$

La méthode de Lie montre que le pseudo-groupe de symétries de la forme

$$(x, y, \alpha) \rightarrow (\xi(x), \eta(x, y), \bar{\alpha}(x, y, p)),$$

de la famille d'équations de Painlevé PII est discret. Il existe donc sept invariants fonctionnellement indépendants définis sur la variété de coordonnées locales  $(x, y, p, a_1, a_2, a_4, \alpha)$ . Ces invariants s'obtiennent en spécialisant les invariants  $I_1, I_{1;3}, I_{1;31}, I_{1;33}, I_{1;331}, I_{1;3331}$  et  $I_{1;33311}$  sur la famille d'équations de Painlevé PII.

On normalise les paramètres  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  et  $\bar{a}_4$  en posant  $\bar{I}_1 = -12, \bar{I}_{1;3} = -12$  et  $\bar{I}_{1;31} = 0$ . On a une normalisation similaire pour toute équation  $y'' = f(x, y, y')$  équivalente à une équation de la famille d'équations de Painlevé PII c'est à dire

$$I_1 = -12, I_{1;3} = -12, I_{1;31} = 0. \quad (5.21)$$

On montre que

**Lemme 5.5** *Le pseudo-groupe de symétries de la forme  $(x, y) \rightarrow (\xi(x), \eta(x, y))$  de la famille d'équations de Painlevé  $y'' = 2y^3 + yx + \alpha$  est égal à*

$$\bar{p} = \varepsilon \lambda^2 p, \bar{y} = \varepsilon \lambda y, \bar{x} = \lambda^2 x, \bar{\alpha} = \varepsilon \alpha \quad (5.22)$$

avec  $\lambda^3 = 1, \varepsilon^2 = 1$ .

En suivant le même raisonnement que précédemment, ROSENFELD-GRÖBNER donne l'ensemble caractéristique

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p} = \frac{1}{6} \left( \frac{I_{1;33311} (I_{1;3331} + 4032)}{I_{1;33311} I_{1;33} - 3096576 - 4032 I_{1;331}} \right) \bar{y}^2 \bar{\alpha}, \\ \bar{x} = - \left( 16 + \frac{1}{72} I_{1;331} \right) \bar{y}^2, \\ \bar{y}^3 = 48384 \frac{\bar{\alpha}}{I_{1;33311} I_{1;33} - 3096576 - 4032 I_{1;331}}, \\ \bar{\alpha}^2 = - \frac{1}{112 I_{1;33311} (16257024 + 8064 I_{1;3331} + I_{1;3331}^2)} (I_{1;33311}^2 I_{1;33}^2 \\ - 8064 I_{1;33311} I_{1;33} I_{1;331} - 6193152 I_{1;33311} I_{1;33} \\ + 9588782923776 + 24970788864 I_{1;331} + 16257024 I_{1;331}^2). \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Le degré de cette transformation est 6 donc égal à la cardinalité du pseudo-groupe de symétries de la famille d'équations de Painlevé PII, prouvant ainsi la proposition suivante

**Proposition 5.6** *Une équation du 2<sup>e</sup> ordre est équivalente à une équation de la famille d'équations de Painlevé  $y'' = 2y^3 + yx + \alpha$  par une transformation fiber-preserving  $\varphi$  si et seulement si la transformation  $\varphi$  est donnée par (5.23) et la normalisation (5.21).*



# Chapitre 6

## Contribution à la construction d'un nouveau solveur

Dans ce chapitre nous proposons un nouveau solveur d'équations différentielles ordinaires basé sur ce que nous avons vu au chapitre précédent. Ce solveur, qui devrait compléter les solveurs actuels, retourne en sortie une équation du livre de Kamke [Kam44] équivalente à l'équation que l'on veut résoudre ainsi que le changement de variables qui réalise cette équivalence.

L'idée est la suivante : Supposons que l'on dispose d'une table dans laquelle on a stocké pour chaque équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  du livre de Kamke :

- (i) le pseudo-groupe maximal  $\Phi$  tel que le pseudo-groupe de symétries  $\mathcal{S}_{\bar{f}} = \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_{\bar{f}}) \cap \Phi$  soit de dimension nulle,
- (ii) la forme nécessaire du changement de variables  $\varphi \in \Phi$  associée à l'équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ .

Pour “résoudre” une EDO donnée, notre solveur teste l'équivalence avec les équations de la table en spécialisant la forme nécessaire du changement de variable sur l'équation à résoudre et en vérifiant ensuite si la transformation obtenue réalise l'équivalence. L'algorithme détaillé est présenté dans la section 6.2.2. Voici ses principaux points forts :

- (i) Tout d'abord, le gain espace en mémoire ainsi que temps de calcul est très important. Nous verrons que le temps de calcul nécessaire pour tester l'équivalence avec une équation du livre de Kamke est de l'ordre de  $\frac{1}{100}$  secondes, ce qui fait moins de 10 secondes pour l'ensemble de la liste.
- (ii) Notre solveur améliore sensiblement les solveurs actuels. On résout les équations qui n'admettent pas de groupe à un paramètre de symétrie ainsi que les équations pour lesquelles les solveurs se contentent de retourner des équations d'ordre inférieur.
- (iii) Contrairement à la méthode de Lie, notre solveur ainsi que la construction de la table ne fait intervenir aucune intégration d'équations différentielles.

Nous montrerons la faisabilité d'une telle architecture sur les équations du second ordre. Toutefois, le champ d'application de notre solveur s'étend aux équations d'ordre quelconque.

## 6.1 Limitations des solveurs actuels

L'implantation actuelle des solveurs d'EDO combine les deux méthodes de classification et de réduction d'ordre. La méthode de classification consiste à tester si l'équation à résoudre figure, modulo un renommage des variables, dans une liste d'équations que l'on sait résoudre. La méthode de réduction d'ordre <sup>1</sup> est réservée aux équations qui ne font pas partie de cette liste.

En pratique, deux difficultés importantes apparaissent : (1) l'équation à résoudre n'admet pas de groupe à un paramètre de symétries<sup>2</sup>, (2) le solveur n'arrive pas à intégrer les équations de Lie. Les exemples suivants illustrent ces difficultés.

**Exemple 6.1 (pseudo-groupe discret de symétries)** *Appliqués à l'équation suivante*

$$\text{ode} := y'' + \frac{2x^4 y' - 6y^2 x - 1}{x^5} = 0, \quad (6.1)$$

*les solveurs actuels, ne retournent aucune sortie. On montre que le pseudo-groupe de symétries ponctuelles de cette équation est discret.*

**Exemple 6.2 (résolution des équations de Lie)** *Dans beaucoup de cas où l'équation à résoudre admet de groupes à un paramètre de symétries, les solveurs actuels ne font que réduire l'ordre de l'équation. Pour les équations du 2<sup>e</sup> ordre, cette situation se produit souvent lorsque la dimension de l'algèbre de symétries ponctuelles est égale à un. Ceci est le cas de l'équation*

$$\text{ode} := y'' + y'^2 - y'\varepsilon^2 + \varepsilon^4 y' e^{2y} + 1 = 0, \quad (6.2)$$

*invariante sous l'action des translations  $(x, y) \rightarrow (x + C, y)$ . Appliqué à cette équation, le solveur retourne l'équation différentielle du premier ordre*

$$b'b + b^2 - \varepsilon^2 b + \varepsilon^4 b e^{2a} + 1 = 0, \quad (6.3)$$

*avec  $b' = \frac{db}{da}$  et ( $C_1$  étant une constante arbitraire)*

$$x = \int \frac{da}{b} + C_1, \quad y(x) = a. \quad (6.4)$$

*Il est normal que le solveur échoue puisqu'en général les EDO du premier ordre sont dures à intégrer (ce qui est le cas de l'équation (6.3)).*

<sup>1</sup>Voir [CTDdM97, CTDdM98, CTR99] pour les différents algorithmes implantés en MAPLE.

<sup>2</sup>Pour certaines équations du 2<sup>e</sup> ordre on peut trouver des facteurs intégrants [CTR99]. Ceci est le cas de l'équation suivante

$$y'' - \frac{y'^2}{y} + (1 + x^2) y y' + 2xy^2 = 0,$$

dont le pseudo-groupe de symétries ponctuelles est de dimension zéro. Elle admet le facteur intégrant  $\frac{1}{y'^2 x}$ , ce qui permet d'obtenir

$$y = \frac{C_1^3}{-C_1^2 - x^2 C_1^2 - 2C_1 x - 2 + e^{C_1 x} C_2 C_1^3}.$$

$C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes arbitraires.

Le solveur que nous proposons prend en entrée une équation différentielle  $\mathcal{E}_f$ , que les solveurs actuels n'arrivent pas à résoudre, et retourne en sortie une équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  de la liste de Kamke équivalente à l'équation  $\mathcal{E}_f$  ainsi que le changement de variables  $\varphi$  qui réalise l'équivalence.

Par exemple, pour l'équation (6.1) on obtient la première équation de Painlevé  $y'' = 6y^2 + x$  (l'équation n° 3 du livre [Kam44]) et le changement de variables

$$\bar{x} = \frac{\lambda^2}{x}, \quad \bar{y} = \lambda y$$

avec  $\lambda^5 = 1$ . Ce qui signifie que l'équation (6.1) est équivalente à la première équation de Painlevé par cette transformation.

Pour l'équation (6.2), le solveur retourne l'équation de Van der Pol  $y'' + y - \varepsilon y'(1 - y^2) = 0$  et le changement de variables (qui préserve les solutions périodiques)

$$(x, y, \varepsilon) \rightarrow (x, \lambda \varepsilon e^y, \varepsilon^2)$$

avec  $\lambda^2 = 1$ .

## 6.2 Un solveur basé sur la méthode de Cartan

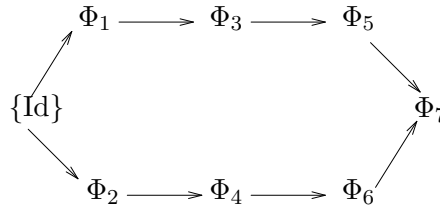
L'idée sur laquelle s'appuie ce nouveau solveur est la suivante : supposons que l'on dispose d'une table dans laquelle on a stocké la forme nécessaire du changement de variables pour toutes les équations  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  du livre de Kamke (où la fonction  $\bar{f}$  est rationnelle). Pour “résoudre” l'équation  $\mathcal{E}_f$ , il suffit de parcourir cette table et de voir quelle est l'équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  dont la forme nécessaire du changement de variables (spécialisée sur  $\mathcal{E}_f$ ) envoie  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  sur  $\mathcal{E}_f$ .

### 6.2.1 Précalcul de la table

Nous avons vu au chapitre précédent que le calcul de la forme nécessaire du changement de variables associée à l'équation cible  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ , repose sur l'hypothèse selon laquelle le pseudo-groupe de transformations autorisées  $\Phi$  vérifie  $\dim(\mathcal{S}_{\bar{f}}) = 0$  où  $\mathcal{S}_{\bar{f}} = \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_{\bar{f}}) \cap \Phi$ . Nous allons commencer par faire la moitié du chemin et de chercher, pour chacune des équations  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  du livre de Kamke, le (ou les) *pseudo-groupe adapté*.

#### 6.2.1.1 Etape 1 : Pseudo-groupes adaptés

On se donne un trie de pseudo-groupes  $\Phi_i \in \text{Diff}^{\text{loc}}(\mathbb{C}^2)$ ,  $i = 1..7$  présentés dans la table 6.1. Il est facile de voir que  $\Phi_1 \subset \Phi_3 \subset \Phi_5$  et  $\Phi_2 \subset \Phi_4 \subset \Phi_6$  et enfin  $\Phi_5, \Phi_6 \subset \Phi_7$



Posons  $d(\mathcal{E}_f, \Phi) := \dim(\mathcal{S}_f)$  avec  $\mathcal{S}_f = \text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_f) \cap \Phi^{(2)}$ .

**Définition 6.1 (signature)** Soient  $d_i := d(\mathcal{E}_f, \Phi_i)$  pour  $1 \leq i \leq 7$ . La signature de l'équation  $\mathcal{E}_f$  est donnée par le 7-uplet

$$\text{sign}(\mathcal{E}_f) := ((d_1, d_3, d_5), (d_2, d_4, d_6)).$$

Remarquons que  $d_1 \leq d_3 \leq d_5 \leq d_7$  et  $d_2 \leq d_4 \leq d_6 \leq d_7$ . Nous dirons que

**Définition 6.2** Les deux signatures  $\text{sign}(\mathcal{E}_f)$  et  $\text{sign}(\mathcal{E}_{\bar{f}})$  match si et seulement si  $d_7 = \bar{d}_7$  et  $(s_1 = \bar{s}_1$  ou  $s_2 = \bar{s}_2)$  avec  $s_1 = (d_1, d_3, d_5)$  et  $s_2 = (d_2, d_4, d_6)$ .

**Définition 6.3** Deux équations ordinaires du second ordre  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  sont dites fortement équivalentes si et seulement si

$$\exists \Phi \in \{\Phi_1, \dots, \Phi_7\}, \quad d(\mathcal{E}_{\bar{f}}, \Phi) = 0, \quad \exists \varphi \in \Phi \mid \varphi_*(\mathcal{E}_f) = \mathcal{E}_{\bar{f}}.$$

Grosso modo, deux équations sont fortement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes par une transformation qui s'obtient sans intégration d'équations différentielles.

**Définition 6.4 (pseudo-groupe adapté)** Un pseudo-groupe de Lie  $\Phi$  est dit adapté à l'équation  $\mathcal{E}_f$  si  $d(\mathcal{E}_f, \Phi) = 0$  et s'il est maximal parmi les pseudo-groupes  $\Phi_1, \dots, \Phi_7$  qui vérifient cette propriété.

Il est important de rappeler que le calcul des dimensions  $d_i$  se fait sans résoudre d'équations différentielles; par exemple à l'aide de ROSENFELD-GRÖBNER (voir chapitre 4, l'exemple de l'équation de Liénard).

Dans la table 6.1, nous avons calculé les pseudo-groupes adaptés pour certaines équations de la liste de Kamke<sup>3</sup>. Par exemple, la première équation de Painlevé (équation n° 3) figure dans la dernière ligne de la table. Ce qui signifie que le pseudo-groupe adapté correspondant est le pseudo-groupe des transformations ponctuelles  $\Phi_7$ . On associe à l'équation d'Emden-Fowler  $y'' = ax^r y^n$ , n° 11, les deux pseudo-groupes de Lie  $\Phi_3$  et  $\Phi_4$ . Dans le cas des EDO linéaires homogènes (telles que l'équation de Bessel, l'équation d'Airy, l'équation hypergéométrique de Gauß...etc), on montre que le pseudo-groupe adapté est (génériquement)  $\Phi = \Phi_4$ .

### 6.2.1.2 Etape 2

Il ne reste plus qu'à parcourir la deuxième moitié du chemin commencé à l'étape 1 et calculer, pour chacune des équations  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  du livre de Kamke, la forme nécessaire du changement de variables  $\varphi \in \Phi$  suivant l'algorithme **ChgtCoords** présenté au chapitre précédent ( $\Phi$  désigne le pseudo-groupe adapté à l'équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ ).

On construit ainsi une table dans laquelle on stocke pour chaque indice  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  les données suivantes

- 1- la signature  $\text{sign}(\mathcal{E}_{\bar{f}})$ ,
- 2- la liste des pseudo-groupes adaptés  $\Phi$ ,

<sup>3</sup>Cette liste est accessible sur l'URL <http://www.cs.uwaterloo.ca/~ecterrab/odetools.html>

	Transformations	Numéro de l'équation selon Kamke
$\Phi_1$	$\bar{x} = x, \bar{y} = \eta(x, y)$	12, 26, 31, 40, 45, 47, 54, 68, 72, 118, 119, 120, 153, 160, 165, 197, 200, 201, 202, 213, 224
$\Phi_3$	$\bar{x} = x + C, \bar{y} = \eta(x, y)$	11, 70, 73, 74, 79, 82, 87, 90, 91, 92, 96, 97, 98, 100, 102, 103, 105, 106, 172, 208, 231
$\Phi_5$	$\bar{x} = \xi(x), \bar{y} = \eta(x, y)$	Null
$\Phi_2$	$\bar{x} = \xi(x, y), \bar{y} = y$	68, 89
$\Phi_4$	$\bar{x} = \xi(x, y), \bar{y} = y + C$	11, 69, 70, 73, 74, 79, 87, 90, 92, 94, 96, 97, 98, 100, 102, 105, 106, 187, 208, 225, 226, 231, 241, équation linéaire homogène
$\Phi_6$	$\bar{x} = \xi(x, y), \bar{y} = \eta(y)$	80, 86, 156, 219
$\Phi_7$	$\bar{x} = \xi(x, y), \bar{y} = \eta(x, y)$	3, 5, 6, 8, 9, 27, 44, 52, 85, 95, 114, 115, 116, 144, 147, 149, 167, 171, 211, 212, 213, 217, 238

TAB. 6.1 – Pseudo-groupes adaptés

3- la forme nécessaire du changement de variables  $\varphi \in \Phi$ ,

**Exemple 6.3** *Par exemple, les entrées correspondantes à l'équation de Van der Pol  $y'' + y - \varepsilon y'(1 - y^2) = 0$  sont*

- 1- la signature  $((0, 1, 1), (1, 1, 1), 1)$ ,
- 2- le pseudo-groupe de Lie  $\Phi_1$ ,
- 3- la transformation

$$\begin{cases} \bar{p} &= -\frac{\bar{y}(4I_{1;142}I_{1;13} + 3 - I_{1;22})}{4I_{1;142}}, \\ \bar{y}^2 &= \frac{-2}{(-5 + I_{1;22})}, \\ \bar{x} &= x, \\ \bar{\varepsilon} &= -\frac{-5 + I_{1;22}}{2I_{1;142}}, \end{cases} \quad (6.5)$$

et la normalisation  $I_{1;1} = -1$ . Les fonctions  $I_i$  sont les invariants associés au problème d'équivalence des équations différentielles du second ordre pour les transformations prises dans  $\Phi_1$ .

Dans le cas de la première équation de Painlevé  $y'' = 6y^2 + x$ , les entrées sont

- 1- la signature  $((0, 0, 0), (0, 0, 0), 0)$ ,
- 2- le pseudo-groupe de Lie  $\Phi_7$  des transformations ponctuelles,
- 3- le changement de variables ponctuel

$$\begin{cases} \bar{p} = \frac{1}{96} \frac{\bar{y}^4 (995328000I_{1;33333} + I_{1;33133}^3)}{I_{1;33133}^2}, \\ \bar{x} = -6 \frac{\bar{y}^2 (1728000I_{1;33333} + 43I_{1;33133}^2)}{I_{1;33133}^2}, \\ \bar{y}^5 = -\frac{8}{75} \frac{I_{1;33133}^5}{990677827584000000I_{1;33333}^2 + 1990656000I_{1;33333}I_{1;33133}^3 + I_{1;33133}^6}, \end{cases} \quad (6.6)$$



---

	<b>newsolve</b>	
<b>Input:</b>	Une équation $\mathcal{E}_f$	
<b>Output:</b>	Une équation $\mathcal{E}_{\bar{f}}$ dans le livre de Kamke et la transformation $\varphi$ tel que $\varphi_*(\mathcal{E}_f) = \mathcal{E}_{\bar{f}}$	
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calculer la signature de <math>\mathcal{E}_f</math>.</li> <li>2. Extraire de la table la liste des équations <math>\mathcal{E}_{\bar{f}}</math> tel que <math>\text{sign}(\mathcal{E}_{\bar{f}})</math> match <math>\text{sign}(\mathcal{E}_f)</math>.</li> <li>3. POUR chaque équation <math>\mathcal{E}_{\bar{f}}</math> de la liste FAIRE <ol style="list-style-type: none"> <li>(a) Spécialiser sur <math>\mathcal{E}_f</math> la forme nécessaire du changement de variables associée à l'équation <math>\mathcal{E}_{\bar{f}}</math>. On obtient la transformation <math>\varphi</math>.</li> <li>(b) Si <math>\varphi \in \Phi</math> et <math>\varphi_*(\mathcal{E}_f) = \mathcal{E}_{\bar{f}}</math> alors RETOURNE <math>(\mathcal{E}_{\bar{f}}, \varphi)</math>.</li> </ol> </li> </ol>	

---

TAB. 6.2 – La procédure **newsolve**

avec les normalisations

$$I_1 = -12, \quad I_2 = 0, \quad I_{1;1} = 0, \quad I_{1;3} = 0, \quad \frac{I_{1;333}}{I_{1;33}} = \frac{1}{720}.$$

Les invariants ici sont ceux associés au problème d'équivalence des équations différentielles ordinaires du second ordre pour les transformations ponctuelles.

### 6.2.2 L'algorithme du nouveau solveur

La procédure principale est présentée dans la table 6.2 Nous allons illustrer le principe de cet algorithme sur les deux équations différentielles du 2<sup>e</sup> ordre (6.1) et (6.2) introduites dans la première section.

**Exemple 6.4** *Commençons par l'équation différentielle*

$$y'' + \frac{2x^4 y' - 6y^2 x - 1}{x^5} = 0. \quad (6.7)$$

La signature de cette équation est  $((0, 0, 0), (0, 0, 0), 0)$ . Le solveur extrait de la table toutes les équations du 2<sup>e</sup> ordre dont la signature match celle de l'équation (6.7). Parmi ces équations on trouve les six équations de Painlevé.

Le solveur se saisit de la première équation de Painlevé PI et procède de la manière suivante

- 1- il spécialise la forme nécessaire du changement de variables (6.6) sur l'équation (6.7). Il obtient

$$\bar{x} = \frac{\lambda^2}{x}, \quad \bar{y} = \lambda y, \quad \bar{p} = -\lambda^4 p x^2$$

avec  $\lambda^5 = 1$ . C'est une transformation ponctuelle.

- 2- il prolonge ensuite cette transformation une prolongation de plus. Il trouve

$$\bar{x} = \frac{\lambda^2}{x}, \quad \bar{y} = \lambda y, \quad \bar{p} = -\lambda^4 p x^2 \quad \bar{q} = \lambda^2 x^3 (2p + qx)$$

avec  $\lambda^5 = 1$ .

- 3- il substitue cette dernière transformation dans l'équation de Painlevé  $\bar{y}'' = 6\bar{y}^2 + \bar{x}$ .  
Ce qui nous donne

$$y'' + \frac{2x^4y' - 6y^2x - \lambda^5}{x^5} = 0,$$

qui est l'équation à résoudre (6.7) car  $\lambda^5 = 1$ . Le solveur retourne alors en sortie la première équation de Painlevé et le changement de variables

$$\bar{x} = \frac{\lambda^2}{x}, \quad \bar{y} = \lambda y, \quad \bar{p} = -\lambda^4 p x^2$$

avec  $\lambda^5 = 1$ .

**Exemple 6.5** Retrouvons l'équation

$$y'' + y'^2 - y'\varepsilon^2 + \varepsilon^4 y' e^{2y} + 1 = 0, \quad (6.8)$$

également introduite au début du chapitre.

La signature de cette équation est  $((0, 1, 1), (1, 1, 1), 1)$ . Par conséquent, le solveur cherche si l'équation (6.8) est équivalente, par une transformation prise dans  $\Phi_1$ , à une équation dont la signature match  $((0, 1, 1), (1, 1, 1), 1)$ . Une telle équation peut être par exemple l'équation de Van de Pol  $y'' + y + \varepsilon(1 - y^2)y' = 0$ , l'équation de Duffing  $y'' + y + \varepsilon y^3 = 0$  etc.

Le solveur commence par tester si l'équation à résoudre (6.8) est équivalente à l'équation de Van de Pol  $y'' + y + \varepsilon(1 - y^2)y' = 0$ ,

- 1- il spécialise la forme nécessaire du changement (6.5) sur l'équation (6.8). Il trouve

$$(x, y, p, \varepsilon) \rightarrow (x, \lambda \varepsilon e^y, \lambda \varepsilon e^y p, \varepsilon^2) \text{ avec } \lambda^2 = 1. \quad (6.9)$$

C'est une transformation appartenant au pseudo-groupe de Lie  $\Phi_1$ .

- 2- il prolonge ensuite cette transformation une prolongation de plus, ce qui nous donne

$$(x, y, p, q, \varepsilon) \rightarrow (x, \lambda \varepsilon e^y, \lambda \varepsilon e^y p, \lambda \varepsilon e^y (p^2 + q), \varepsilon^2),$$

- 3- il substitue cette dernière transformation dans l'équation de Van de Pol. Il trouve

$$y'' + y'^2 - y'\varepsilon^2 + \lambda^2 \varepsilon^4 y' e^{2y} + 1 = 0,$$

c'est à dire l'équation à résoudre. Le solveur retourne alors en sortie l'équation de Van de Pol et la transformation (6.9).

### 6.2.3 Temps de calcul et espace mémoire

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté un nouveau solveur basé sur le calcul de la forme nécessaire du changement de variables. Pour intégrer l'équation différentielle  $\mathcal{E}_f$ , notre solveur parcourt une table précalculée et cherche l'équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  dont la forme nécessaire du changement de variables (spécialisée sur  $\mathcal{E}_f$ ) envoie  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  sur  $\mathcal{E}_f$ .

Le fait de s'appuyer sur un précalcul a pour conséquence un gain espace en mémoire ainsi que temps de calcul très important. Pour se faire une idée, le temps de calcul nécessaire pour traiter l'équation de Van de Pol dans l'exemple 6.5, est de l'ordre d'un centième de seconde. Les calculs ont été réalisés sur un PC muni d'un processeur Pentium(4) et 256 Mo de mémoire vive.

## 6.3 Révision de la liste de Kamke

### 6.3.1 Équations redondantes

Il s'agit de restreindre la liste de Kamke en éliminant les équations redondantes i.e. les équations qui peuvent être ramenées à d'autres équations de la liste. Ceci est le cas par exemple de l'équation numéro 5

$$y'' = ay^2 + bx + c.$$

On montre qu'elle est équivalente à la première équation de Painlevé. En effet, une translation sur la variable indépendante  $x$  permet d'absorber la constante  $c$ . Un scaling sur  $x$  et  $y$  permet d'éliminer le  $b$  et enfin la transformation  $(x, y) \rightarrow \left(\left(\frac{a}{6}\right)^{1/5} x, \left(\frac{a}{6}\right)^{3/5} y\right)$  fait le reste.

De même, la procédure `newsolve` montre que l'équation numéro 209

$$y^3 y'' - 1 = 0$$

est fortement équivalente à l'équation 138

$$2yy'' - y'^2 - 1 = 0$$

par la transformation  $(x, y) \rightarrow (x, \lambda \frac{y^2}{2})$  avec  $\lambda^2 = 1$ .

### 6.3.2 Réduction des pseudo-groupes discrets de symétries

Étant donnée une équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  de liste de Kamke. Calculées dans le pseudo-groupe adapté, les symétries de l'équation  $\mathcal{E}_{\bar{f}}$  forment un pseudo-groupe discret. Dans beaucoup de cas, un tel pseudo-groupe n'est pas réduit à l'identité. Par conséquent, la forme nécessaire du changement de variables n'est pas une transformation rationnelle (en  $\bar{x}$ ). Dans ce cas, l'étape (3-b) dans `newsolve` peut être difficile.

La réduction du pseudo-groupe de symétries en un pseudo-groupe réduit à l'identité permet d'éviter ce genre de problème. L'idée consiste à écrire l'équation cible en les invariants du pseudo-groupe de symétries.

**Exemple 6.6 (Kamke 155)** *Considérons l'équation 155 du livre de Kamke*

$$y'' = -\frac{y'^2 + 1}{2(y - 1)}. \quad (6.10)$$

Le pseudo-groupe adapté correspondant est le pseudo-groupe  $\Phi_1$  formé des transformations de la forme ( $\eta$  est une fonction quelconque tel que  $\eta_y \neq 0$ )

$$(x, y) \rightarrow (x, \eta(x, y)).$$

La forme nécessaire du changement de variables est

$$\begin{cases} \bar{p} = -\frac{I_{1;3}\bar{y}}{2I_1} + \frac{I_{1;3}}{2I_1}, \\ \bar{y}^2 = 2\bar{y} + \frac{1-4I_1}{4I_1}, \\ \bar{x} = x. \end{cases} \quad (6.11)$$

C'est est une transformation algébrique de degré deux. Ceci vient du fait que le pseudo-groupe de symétries est ici donné par

$$\{(x, y, p) \rightarrow (x, \lambda(y-1)+1, \lambda p), \quad \lambda^2 = 1\} \quad (6.12)$$

et donc non réduit à l'identité.

Déterminons à présent les invariants d'un tel pseudo-groupe. Remarquons tout d'abord que la fonction  $F_1(x, y) := x$  est invariante. Puisque  $\bar{y} = \lambda(y-1)+1$ , on déduit (en tenant compte de  $\lambda^2 = 1$ )

$$\frac{(\bar{y}-1)^2}{(y-1)^2} = 1.$$

Ainsi,  $\{F_1(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}, F_2(\bar{x}, \bar{y}) := (\bar{y}-1)^2\}$  est un ensemble d'invariants fonctionnellement indépendants sous l'action du pseudo-groupe discret (6.12).

Il nous reste qu'à écrire l'équation cible (6.10) en ces invariants. Pour cela, effectuons le changement de variable  $(\bar{x}, \bar{y}) = (F_1, \lambda\sqrt{F_2}+1)$  dans l'équation (6.10). Après tout calcul fait on obtient l'équation (on a posé  $x = F_1$  et  $y = F_2$ )

$$y'' = -\frac{y'^2 - 4y}{4y}.$$

Le pseudo-groupe de symétries est maintenant réduit à l'identité. La forme nécessaire du changement de variables

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \left(x, \frac{1}{4I_1}, \frac{I_{1;3}}{4I_1^2}\right),$$

est bien une transformation rationnelle.

**Exemple 6.7 (Painlevé PI, Kamke 3)** Appliquons le même raisonnement à la première équation de Painlevé PI  $y'' = 6y^2 + x$ . Dans ce cas, le pseudo-groupe adapté est le pseudo-groupe des transformations ponctuelles  $\Phi_7$ .

Le pseudo-groupe de symétries est

$$\{(x, y) \rightarrow (\lambda^2 x, \lambda y), \quad \lambda^5 = 1\}.$$

On en déduit que les invariants sont  $F_1 := y^5$  et  $F_2 := x/y^2$ . Dans notre réduction de degré nous voulons préserver la propriété de Painlevé. Nous avons donc besoin de

construire de nouveaux invariants (de degré minimum) tel que l'inversion (l'écriture de l'équation en fonction des invariants) soit fiber-preserving. Concrètement, nous avons besoin d'un invariant qui dépend que de  $x$ . Posons  $K_1 := F_1^2 F_2^5 = \bar{x}^5$  et  $K_2 := F_1 F_2^3 = \bar{x}^3 / \bar{y}$ . L'inversion donne ( $\lambda^5 = 1$ )

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \lambda \sqrt[5]{K_1}, \lambda^3 \frac{K_1^{3/5}}{K_2} \right),$$

ou encore en posant  $x = K_1$  et  $y = K_2$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \lambda \sqrt[5]{x}, \lambda^3 \frac{x^{3/5}}{y} \right).$$

La substitution dans l'équation de Painlevé PI donne l'équation

$$y'' = 2 \frac{y'^2}{y} - 2 \frac{y'}{x} - \frac{y^2}{25x^2} + \frac{6}{25} \frac{y}{x^2} - \frac{6}{25x}$$

dont le pseudo-groupe de symétries ponctuelles est réduit à l'identité. La forme nécessaire du changement de variables associée est par conséquent rationnelle en  $\bar{x}$  (contrairement à la forme nécessaire du changement de variables associée à PI qui est elle de degré 5).

# Chapitre 7

## Conclusion et perspectives

Nous avons au cours de cette thèse montré la faisabilité d'un nouveau solveur d'équations différentielle ordinaires. Les aspects mathématique et informatique liés ont été abordés.

D'UN POINT DE VUE MATHÉMATIQUE, nous avons montré que, sous certaines conditions, le changement de variables qui réalise l'équivalence entre deux équations différentielles est une transformation algébrique, qui s'obtient sans intégrer aucune équation différentielle. De plus, le degré d'une telle transformation est donné par la cardinalité du pseudo-groupe de symétries. Nous avons également montré comment obtenir cette transformation à l'aide d'un nouveau algorithme `ChgtCoords` que nous avons testé sur plusieurs exemples de la liste de Kamke.

Les pseudo-groupes de symétries discrets ont été également étudiés. Nous avons donné une méthode qui permet de calculer le pseudo-groupe de symétries d'une équation donnée lorsque celui-ci est de dimension nulle. Nous avons également étudié les pseudo-groupes de symétries de familles d'équations. Plusieurs exemples intéressants ont été traités.

Un autre résultat de la thèse concerne la méthode d'équivalence de Cartan. Il s'agit de présenter l'étape de mise en équations d'un problème d'équivalence, sous forme d'algorithme.

D'UN POINT DE VUE INFORMATIQUE, les résultats précédents nous ont permis de proposer un nouveau solveur qui devrait améliorer sensiblement les solveurs actuels. Nous avons pu constater que ce nouveau solveur permet de résoudre des équations différentielles jusqu'ici intraitables.

Notre solveur s'appuie sur une table précalculée, ce qui a pour conséquence, non seulement, un gain très important en temps de calcul mais aussi, une indépendance de tout choix de langage. En effet, il peut très bien se programmer en MAPLE, en MATHEMATICA ou tout autre langage de haut niveau. Ce nouveau solveur n'a pas encore été l'objet d'une implantation et beaucoup de chose reste à faire dans ce sens. En particulier, il faut calculer la forme nécessaire du changement de variables pour toutes les équations rationnelles du livre de Kamke.

Pour finir, voici quelques questions que nous jugeons intéressantes :

- (i) Tout d'abord, la mise en place d'un paquetage dédié à l'algorithmique des groupoides. Ce paquetage devrait contenir la procédure de symétrisation présentée

au chapitre 1, le passage groupoïde de Lie–algebroid de Lie également présenté également au chapitre 1, la prolongation d’un groupoïde de Lie à partir de ces équations de définition exposée au chapitre 2 ...etc.

- (ii) Nous avons pu remarquer que sous certaines hypothèses (voir théorème 2.5 page 57) la transformation qui réalise l’équivalence entre deux équations différentielles est bi-rationnelle. Elle préserve donc le groupoïde de Galois. La question est d’établir clairement le lien entre la méthode d’équivalence de Cartan et la théorie de Galois différentielle des EDO non linéaires (à la Malgrange).
- (iii) La dernière perspective est la géométrisation de l’algèbre différentielle. Un premier pas dans ce sens est de voir un ensemble caractéristique comme une diffiété où un changement de classement correspond à un changement de coordonnées sur la diffiété.

La géométrie différentielle est peu utilisée dans la communauté du calcul formel ; certains pensent qu’il en est ainsi parce qu’elle ne présente aucun intérêt pratique. J’espère que cette thèse contribuera à démontrer le contraire.

# Annexe A

## Quelques formules en algèbre extérieure

Etant donnée une variété  $M$  de dimension  $m$ . Soit  $\{\omega^i\}_{i=1..m}$  un corepère de  $M$  avec les équations de structure ( $C_{kj}^i = -C_{jk}^i$ )

$$d\omega^i = -C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k.$$

Notons par  $\{X_i\}_{i=1..m}$  le repère dual et par  $f_{;k} := X_k(f)$ . Les coefficients  $C_{jk}^i$  vérifient les relations suivantes, issues de l'identité fondamentale  $d^2 = 0$

$$C_{[ij;k]}^l + C_{m[i}^l C_{jk]}^m = 0.$$

Ici, le crochet  $[ijk]$  désigne une permutation circulaire sur les indices  $i, j$  et  $k$ . Ainsi  $C_{[ij;k]}^l = C_{ij;k}^l + C_{ki;j}^l + C_{jk;i}^l$ .

### A.1 Différentielle extérieure

**d'une 1-forme**  $\omega = A_i \omega^i$

$$d\omega = (A_{[j;i]} - A_k C_{i,j}^k) \omega^i \wedge \omega^j := (A_{j;i} - A_{i;j} - A_k C_{i,j}^k) \omega^i \wedge \omega^j$$

**d'une 2-forme**  $\omega = A_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$

$$d\omega = (A_{[ij;k]} - A_m C_{jk}^m) \omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k.$$

**d'une 3-forme**  $\omega = A_{ijk} \omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k$

$$d\omega = (-A_{[ijk;l]} - A_m C_{kl}^m) \omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l.$$

Ici le crochet  $[ijk;l]$  désigne une permutation circulaire sur les indices  $i, j, k$  et  $l$  plus une alternance de signe.



d'une  $p$ -forme  $\omega = A_{i_1 \dots i_p} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}$  avec  $p < m$

$$d\omega = \left( (-1)^p A_{[i_1 \dots i_p; j]} - A_{m[i_1 \dots i_{p-1} C_{i_p j}^m]} \right) \omega^{i_0} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p} \wedge \omega^j$$

où le crochet  $[i_1 \dots i_p j]$  désigne une permutation circulaire sur les indices  $i_1 \dots i_p j$  si  $p$  est impair et une permutation circulaire plus alternance de signe si  $p$  est pair.

## A.2 Produit intérieur

Le produit intérieur d'une  $p$ -forme  $\omega$  sur  $M$  par rapport au champs de vecteur  $V = V^i X_i$  est une  $(p-1)$ -forme, notée  $i_V(\omega)$ , définie par

$$i_V \omega (W_1, W_2, \dots, W_{p-1}) = \omega(V, W_1, W_2, \dots, W_{p-1})$$

pour tout  $W_1, W_2, \dots, W_{p-1} \in \Gamma(TM)$ . On montre

- (1) si  $\omega$  est 0-forme alors  $i_V(\omega) = 0$ ,
- (2) si  $\omega$  est 1-forme i.e.  $\omega = A_i \omega^i$ , alors  $i_V(\omega) = A_i V^i$ ,
- (3) si  $\omega$  est 2-forme i.e.  $\omega = A_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$  alors  $i_V(\omega) = A_{ji} V^j \omega^i$ ,
- (4) plus généralement, si  $\omega = A_{i_1 \dots i_p} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}$  alors  $i_V(\omega) = A_{ji_2 \dots i_p} V^j \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}$ .

## A.3 Dérivée de Lie

Soient  $V, W \in \Gamma(TM)$ ,  $\omega$  et  $\theta \in \Omega(M)$ . On montre que

- (1)  $\mathcal{L}_V(\omega) = di_V(\omega) + i_V d\omega$ ,
- (2)  $\mathcal{L}_V(d) = d(\mathcal{L}_V)$ ,
- (3)  $\mathcal{L}_V(\omega + \theta) = \mathcal{L}_V(\omega) + \mathcal{L}_V(\theta)$ ,
- (4)  $\mathcal{L}_V(\omega \wedge \theta) = \mathcal{L}_V(\omega) \wedge \theta + \omega \wedge \mathcal{L}_V(\theta)$ ,
- (5) si  $\omega = A_i \omega^i$  et  $V = V^i X_i$  alors  $\mathcal{L}_V \omega = (V^i (A_{k;i} + A_j C_{ik}^j) + V_{;k}^i A_i) \omega^k$ ,
- (6) si  $V = v^i X_i$  et  $W = w^j X_j$  alors  $[V, W] = (v^i \mathcal{L}_{X_j} w^i - w^j \mathcal{L}_{X_j} v^i + v^n w^j C_{nj}^i) X_i$ .
- (7) si  $\omega \in \Omega^1(M)$  alors  $d\omega(V, W) = V(\omega(W)) - W(\omega(V)) - \omega([V, W])$ .

## A.4 Produit extérieur

Soient  $\omega = A_I \omega^I$ ,  $\theta = B_J \omega^J \in \Omega(M)$  où  $I$  et  $J$  sont des multi-indices de longueur  $p$  et  $q$  respectivement. On a

$$\omega \wedge \theta = A_{[I} B_{J]} \omega^{K=\text{cat}(I, J)}.$$

Le crochet  $[IJ]$  désigne une permutation circulaire si  $p+q$  est impair et une permutation circulaire plus alternance de signe si  $p+q$  est pair. Le multi-indice  $K = \text{cat}(I, J)$  est la concaténation des multi-indices  $I$  et  $J$ .

# Index

- $\mathfrak{a}(1, \mathbb{R})$ , 81
- $\text{Aut}^{\text{loc}}(\mathcal{E}_f)$ , 76
- $\text{Aut}^{\text{loc}}(P)$ , 60
- $C^\infty(M)$ , 7
- $C^\omega(M)$ , 7
- $\Delta$ , 19
- $\text{Diff}^{\text{loc}}M$ , 29
- $\mathcal{E}$ , 19
- $G$ , 60
- $\mathfrak{g}$ , 69
- $J^\infty$ , 18
- $J^q(X, U)$ , 18
- $\mathbb{K}$ , 17
- $\mathbf{L}$ , 69
- $\Omega(M)$ , 20
- $P = (M, G, \theta)$ , 61
- $\Phi$ , 29
- $\mathcal{R}(M)$ , 59
- $\text{rp}(E_k)$ , 22
- $W$ , 69
- $\mathcal{S}_f$ , 76
- $\theta$ , 61
- algorithme
  - de ROSENFELD-GRÖBNER, 41
  - de calcul des contraintes d'intégrabilité
    - d'un système de Pfaff linéaire, 28
  - de la méthode d'équivalence, 67
- automorphisme, 60
- caractères
  - de Cartan, 23
  - réduits de Cartan, 24
- catégorie, 53
- classement
  - d'élimination, 42
  - définition, 37
- cycles limites, 83
- dépendance
  - algébrique, 62
  - fonctionnelle, 62
- dérivée de Lie, 78
- développement de Taylor, 43
- diffalg, 45
- diffiété, 19
- dimension de l'espace des solutions, 45
- distribution, 19
- éléments de torsion essentiels, 27
- élément intégral, 21
- élimination différentielle, 42
- ensemble
  - caractéristique, 40
  - complet d'invariants, 34
- équation
  - autonome du second ordre, 64
  - d'Abel, 119
  - d'Airy, 47, 114
  - d'Emden–Fowler, 113
  - d'Emden–Fowler, 88, 101
  - de Bessel, 114
  - de Clairaut, 22
  - de Liénard, 79
  - de Painlevé, 49, 88, 113
  - de Rayleigh, 113
  - de Riccati, 119
  - de Yermakov, 103
  - hypergéométrique de Gauß, 114
- équations
  - de Lie, 79
  - de structure, 26, 68
- $\{e\}$ -structure, 62
- famille d'équations
  - de Lagerstrom, 105
  - de Painlevé II, 90
  - de Painlevé PII, 104
  - de Van der Pol, 92, 106

- de Yermakov, 91
- forme
  - canonique, 61
  - de Maurer–Cartan, 67
  - semi-basique, 67
- G-structure
  - définition, 60
- générateur infinitésimal, 78
- groupe
  - à  $r$  paramètres de transformations, 77
  - à un paramètre de transformations, 77
- groupoïde, 53
- idéal
  - différentiel, 38
  - différentiel extérieur, 20
  - extérieur, 20
- invariant, 34
- localisation, 40
- normalisation du 1er ordre de type constant, 70
- opérateur
  - d’anti-symétrisation, 69
- plan intégral
  - définition, 21
  - régulier, 22
  - singulier, 22
- problème d’équivalence, 33
- prolongation
  - d’un système différentiel extérieur, 24
  - d’une transformation, 19
- prolongement
  - holoédrique, 29
  - d’un pseudo-groupe, 29
- pseudo-algèbre de Lie, 33
- pseudo-division, 36
- pseudo-groupe
  - de Lie, 29
  - définition, 29
  - de dimension finie, 30
  - de dimension infinie, 30
- solution
  - périodique d’une équation autonome, 64
- symétrie
  - d’une diffiété, 76
  - d’une distribution, 30
- système
  - de Pfaff, 20
  - d’équations aux dérivées partielles, 19
  - de Pfaff linéaire, 26
  - de poids, 87
  - différentiel extérieur, 20
  - différentiel extérieur avec condition d’indépendance, 24
  - extérieur en involution, 24
  - polaire, 22
  - quasi-linéaire, 41
- théorème
  - de Lie–Bäcklund, 19
  - de Cartan–Kähler, 23
  - de Cartan–Kuranishi, 25
  - de Frobenius, 21
  - premier théorème fondamental de Cartan, 30
- torsion
  - intrinsèque, 70
- variété intégrale, 20

# Table des figures

1	<i>Algorithme d'un solveur d'EDO.</i>	10
1.1	<i>La solution singulière est l'enveloppe de la famille des solutions ordinaires</i>	23
1.2	<i>Algorithme de calcul des contraintes d'intégrabilité d'un système de Pfaff linéaire</i>	28
2.1	<i>Escaliers associés aux inconnues <math>u</math> et <math>v</math>.</i>	44
2.2	<i>Escalier associé à l'indéterminée différentielle <math>\bar{y}</math> dans (2.9)</i>	48
2.3	<i><math>\mathcal{G}(\mathcal{S}_{\bar{f}})</math> opère simplement transitivement sur <math>\mathcal{G}_{\bar{f}}</math>.</i>	56
3.1	<i>Définition de la 1-forme canonique <math>\theta</math></i>	60
3.2	<i>Correspondance entre <math>\varphi</math> et <math>\varphi_*</math></i>	60
3.3	<i><math>\varphi^*(\bar{\theta}) = \theta</math></i>	61
3.4	<i>Correspondance entre <math>p</math> et <math>\bar{p}</math></i>	61
3.5	<i>Schéma d'algorithme de la méthode d'équivalence.</i>	67
3.6	<i>La torsion intrinsèque est equivariante</i>	70
4.1	<i>La transformation <math>\varphi</math> est une symétrie du feuilletage.</i>	76
5.1	<i>Lorsque <math>\Phi \subset \text{Diff}(M)</math>, les groupes de symétries sont conjugués</i>	96



# Bibliographie

- [BCG<sup>+</sup>91] R. L. BRYANT, S. S. CHERN, R. B. GARDNER, Goldschmidt H. L. et Griffiths P. A. : *Exterior Differential Systems*, volume 18. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [BK89] G. W. BLUMAN et S. KUMEI : *Symmetries and differential equations*, volume 81 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [BLOP95] F. BOULIER, D. LAZARD, F. OLLIVIER et M. PETITOT : Representation for the radical of a finitely generated differential ideal. *In proc. ISSAC'95*, pages 158–166, Montréal, Canada, 1995.
- [Bou94] F. BOULIER : *Etude et implantation de quelques algorithmes en algèbre différentielle*. Thèse de doctorat, Univ. Lille I, 59655 Villeneuve-d'Ascq, juin 1994.
- [Bour] F. BOULIER : *Réécriture algébrique dans les systèmes d'équations différentielles en vue d'applications dans les Sciences du Vivant*. Habilitation, Univ. Lille I, 2006, URL : <http://www2.lifl.fr/~boulrier/>.
- [Car45] E. CARTAN : *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*. Hermann, Paris, 1945.
- [Car53] E. CARTAN : *La structure des groupes infinis*, volume 2 de *oeuvres complètes*, pages 1335–1358. Gauthiers-Villars, Paris, 1953.
- [Car67] H. CARTAN : *Cours de calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1967.
- [Che53] S. S. CHERN : Pseudo-groupes continus infinis. *In Géométrie différentielle.*, volume 1953 de *Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg*, pages 119–136. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953.
- [Che66] S. S. CHERN : The geometry of  $G$ -structures. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72:167–219, 1966.
- [CTDdM97] E. S. CHEB-TERRAB, L. G. S. DUARTE et L. A. C. P. da MOTA : Computer algebra solving of first order ODEs using symmetry methods. *Comput. Phys. Comm.*, 101(3):254–268, 1997.
- [CTDdM98] E. S. CHEB-TERRAB, L. G. S. DUARTE et L. A. C. P. da MOTA : Computer algebra solving of second order ODEs using symmetry methods. *Comput. Phys. Comm.*, 108(1):90–114, 1998.
- [CTR99] E. S. CHEB-TERRAB et A. D. ROCHE : Integrating factors for second-order ODEs. *J. Symbolic Comput.*, 27(5):501–519, 1999.

- [DN05] R. DRIDI et S. NEUT : Fiber preserving transformations and the equation  $y''' = f(x, y, y', y'')$ . *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 33, 4 pp. (electronic), 2005.
- [DN06] R. DRIDI et S. NEUT : The equivalence problem for fourth order differential equations under fiber preserving diffeomorphisms. *J. Math. Phys.*, 47(1):013501, 6, 2006.
- [DPN05] R. DRIDI, M. PETITOT et S. NEUT : Elie cartan's geometrical vision or how to avoid expression swell. *Submitted to J. Symb. Com.*, 2005.
- [Ehr53] C. EHRESMANN : Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie. *In Colloque de topologie et géométrie différentielle, Strasbourg, 1952, no. 11*, page 16. La Bibliothèque Nationale et Universitaire de Strasbourg, 1953.
- [Gar89] R.B. GARDNER : *The method of equivalence and its applications*. SIAM, Philadelphia, 1989.
- [Hyd98a] P. E. HYDON : Discrete point symmetries of ordinary differential equations. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 454(1975):1961–1972, 1998.
- [Hyd98b] P. E. HYDON : How to find discrete contact symmetries. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 5(4):405–416, 1998.
- [Hyd00] P. E. HYDON : How to construct the discrete symmetries of partial differential equations. *European J. Appl. Math.*, 11(5):515–527, 2000.
- [IL03] T. A. IVEY et J. M. LANDSBERG : *Cartan for beginners : differential geometry via moving frames and exterior differential systems*, volume 61 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Kam44] E. KAMKE : *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1944.
- [KLS85] N. KAMRAN, K. G. LAMB et W. F. SHADWICK : The local equivalence problem for  $d^2y/dx^2 = F(x, y, dy/dx)$  and the Painlevé transcendents. *J. Differential Geom.*, 22(2):139–150, 1985.
- [KLV86] I. S. KRASIL'SHCHIK, V. V. Lychagin et A. M. VINOGRADOV : *Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986.
- [KN63] S. KOBAYASHI et K.i NOMIZU : *Foundations of differential geometry. Vol I*. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1963.
- [Kob72] S. KOBAYASHI : *Transformation groups in differential geometry*. Springer-Verlag, New York, 1972. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 70.
- [Kol73] E.R. KOLCHIN : *Differential algebra and algebraic groups*. Academic press, New-York and london, 1973.

- [KS86] N. KAMRAN et W. F. SHADWICK : The solution of the Cartan equivalence problem for  $d^2y/dx^2 = F(x, y, dy/dx)$  under the pseudogroup  $\bar{x} = \varphi(x)$ ,  $\bar{y} = \psi(x, y)$ . In *Field theory, quantum gravity and strings (Meudon/Paris, 1984/1985)*, volume 246 de *Lecture Notes in Phys.*, pages 320–334. Springer, Berlin, 1986.
- [KS87] N. KAMRAN et W. F. SHADWICK : A differential geometric characterization of the first Painlevé transcendent. *Math. Ann.*, 279(1):117–123, 1987.
- [Kur57] M. KURANISHI : On E. Cartan’s prolongation theorem of exterior differential systems. *Amer. J. Math.*, (79):1–47, 1957.
- [Lor05] F. LORAY : *Pseudo-groupe d’une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux*. Prépublication IRMAR. 2005.
- [LPH03] F. E. LAINE-PEARSON et P. E. HYDON : Classification of discrete symmetries of ordinary differential equations. *Stud. Appl. Math.*, 111(3):269–299, 2003.
- [LR98] I. G. LISLE et G. J. REID : Geometry and structure of Lie pseudogroups from infinitesimal defining equations. *Journal of Symbolic Computation*, 26:355–379, 1998.
- [LR00] I. G. LISLE et G. J. REID : *Cartan Structure of Infinite Lie Pseudogroups*, pages 116–145. Cambridge University Press, 2000.
- [Mal02] Bernard MALGRANGE : Le groupoïde de Galois d’un feuilletage. In *Monographies de l’Enseignement mathématique*, volume 38, pages 465–501. 1902.
- [Man91] E. L. MANSFIELD : *Differential Gröbner Bases*. Thèse de doctorat, University of Sydney, Australia, 1991.
- [Neut] S. NEUT : *Implantation et nouvelles applications de la méthode d’équivalence de Cartan*. Phd thesis, Univ. Lille I, 2003, URL : <http://www2.lifl.fr/~neut/>.
- [Olv93] P. J. OLVER : *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1993.
- [Olv95] P. J. OLVER : *Equivalence, invariants, and symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Pai02] P. PAINLEVÉ : Sur les équations différentielles du second ordre et d’ordre supérieur dont l’intégrale générale est uniforme. *Acta Math.*, 21:1–85, 1902.
- [Pet99] M. PETITOT : *Quelques méthodes de calcul formel appliquées à l’étude des équations différentielles*. Thèse d’habilitation, Université Lille I, Février 1999.
- [PZ95] A. D. POLYANIN et V. F. ZAITSEV : *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. CRC Press, New York, 1995.
- [Rei91] G. J. REID : Algorithms for reducing a system of PDE’s to standard form determining the dimension of its solution space and calculating its Taylor series solution. *Eur. J. of Applied Math.*, 2:293–318, 1991.



- [Rit50] J.F. RITT : *Differential Algebra*. Amer. Math. Soc, New York, 1950.
- [Ros84] P. ROSENAU : A note on integration of the Emden-Fowler equation. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 19(4):303–308, 1984.
- [RS75] S. ROSENBLAT et J. SHEPHERD : On the asymptotic solution of the Lagerstrom model equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 29:110–120, 1975.
- [RWB96] G. J. REID, A. D. WITTKOPF et A. BOULTON : Reduction of systems of nonlinear partial differential equations to simplified involutive forms. *European J. Appl. Math.*, 7(6):635–666, 1996.
- [RWW93] G. J. REID, D. T. WEIH et A. D. WITTKOPF : A point symmetry group of a differential equation which cannot be found using infinitesimal methods. *In Modern group analysis : advanced analytical and computational methods in mathematical physics (Acireale, 1992)*, pages 311–316. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
- [Sei56] A. SEIDENBERG : An elimination theory for differential algebra. *Univ. California Publ. Math. (N.S.)*, 90:31–38, 1956.
- [SS65] I. SINGER et S. STERNBERG : The infinite groups of Lie and Cartan. *J. Analyse Math.*, 15, 1965.
- [Ste64] S. STERNBERG : *Lectures on Differential Geometry*. Prentice-Hall, 1964.
- [Vin89] A. M. VINOGRADOV : Symmetries and conservation laws of partial differential equations : basic notions and results. *Acta Appl. Math.*, 15(1-2):3–21, 1989. Symmetries of partial differential equations, Part I.
- [Vin94] A. M. VINOGRADOV : From symmetries of partial differential equations towards secondary (“quantized”) calculus. *J. Geom. Phys.*, 14(2):146–194, 1994.
- [Wu89] Wen Jun WU : On the foundation of algebraic differential geometry. *Systems Sci. Math. Sci.*, 2(4):289–312, 1989.